

Maurizio Berni, “Professore, la calcolatrice non prende!”

Uno di questi giorni, nella mia classe prima (del nuovo indirizzo “Servizi per la Sanità e l’Assistenza Sociale”), ho proposto di trovare quella che viene generalmente chiamata la “frazione generatrice” del numero decimale periodico

$$0,1\overline{53846}.$$

Se non ci fosse dietro un percorso che conduce a ritenere “sensate” queste richieste, sarebbe solo una delle tante bizzarrie matematiche a cui i nostri alunni sono assuefatti, e che subiscono ormai senza alcuna speranza di ricerca di senso. Generalmente i testi propongono, come se il vero scopo dell’insegnamento fosse quello di avere il risultato, e non di vivere in prima persona le idee e i metodi della matematica, la seguente “regola” (parola infausta, di per sé priva di statuto matematico...):

“si scrive il numero privato della virgola, si sottrae il numero formato dalle cifre che precedono il periodo, e si divide per un numero formato da tanti 9 quante sono le cifre del periodo, e da tanti zeri quante sono le cifre dell’antiperiodo”

Ecco, se vogliamo sostituire alla matematica un insieme dogmatico di regole, con questa ci riusciamo benissimo. A prescindere dallo scarso rigore terminologico (non ha senso parlare di “numero privato della virgola”, perché se si priva un numero della virgola, si ottiene un altro numero...), costringere alla memorizzazione di questa regola, cortocircuita e “brucia” tutto un percorso, fatto di scoperta degli strani fenomeni dell’infinito (le cifre del numero periodico), di manipolazione di equazioni, di monomi, finalizzato ad affrontare un problema sensato:

“trovare un multiplo intero di un numero decimale”

Sull’altare di un risultato che in realtà non interessa nessuno, si sacrifica la vera attività matematica. Prima di arrivare a trasformare in frazione un numero con un periodo di 6 cifre, si procede con numeri non periodici, e si scopre che diventano interi moltiplicandoli (in modo non unico!) per opportune potenze di 10; introducendo un’incognita x si ragiona e si producono argomentazioni utilizzando il linguaggio algebrico: “Se pongo 1,6 uguale a x , allora scopro che $10x$ fa 16, quindi x è uguale a $16/10$ ”.

“Se...allora...quindi...”

Questa è matematica, non le affermazioni apodittiche e immotivate “*si fa così, così e così...*”. Dice Dewey: “*Si ingiunge allo scolaro di fare questa o quella cosa specifica senza portarlo a conoscenza delle ragioni per cui deve farlo*”; e, poco più oltre: “*Questo metodo riduce l’educazione degli esseri umani al livello dell’addestramento animale.*”¹

Proseguendo nel nostro percorso, arriviamo ai numeri periodici, e alle sorprese che essi nascondono...

“*Se pongo $1, \overline{6}$ uguale a x , e moltiplico per 10, scopro che si ottiene un altro numero periodico, $16, \overline{6}$* ”

Ecco come funziona l’infinito! ...tolgo la prima cifra sei... e l’insieme delle infinite cifre sei rimane inalterato! Da questo capisco che se anche moltiplico per ulteriori potenze di 10, toglierò tante cifre sei dal periodo... ma a destra della virgola continuerò ad avere sempre la stessa lista infinita di cifre sei; così facendo il periodo resta inalterato e non otterrò mai un numero intero!

A questo punto l’insegnante può guidare il percorso di scoperta con una domanda chiave:

“*Avete dei numeri con la stessa parte decimale: con quale operazione tra di essi potete ottenere un numero intero?*”

Con una discussione animata, si scarta l’addizione, la prima che viene in mente; basta qualche controesempio... A sorpresa, arriva la risposta “*divisione!*”; non è certamente quella che l’insegnante ha in mente, ma sarebbe un grave errore metodologico (e anche matematico) dire che questa risposta è errata! Infatti $16, \overline{6}$, diviso per $1, \overline{6}$ fa esattamente 10, che è un numero intero; ma allora perché non lo prendiamo in considerazione? Perché nel “lato letterale” delle nostre uguaglianze $10x$ diviso per x fa 10 e si ottiene l’uguaglianza $10=10$; “scompare” la x ! In pratica risolviamo il nostro problema di ottenere un numero intero, ma non in modo utile al nostro scopo, che è quello di ricavare un *multiplo di x che sia intero*. Dopo varie prove, arriva la sottrazione... $16, \overline{6} - 1, \overline{6} = 15$, numero intero! E dal “lato letterale” delle uguaglianze che cosa si ottiene? $10x - x = 9x$, un multiplo di x ! Dunque x fa $15/9$, e abbiamo risolto il nostro problema.

1 J. Dewey, “Come pensiamo”, La Nuova Italia, Firenze, 1986; pag. 130

E se le cifre del periodo sono due? Per esempio, se $x = 0,1\overline{6}$? moltiplicando per 10 che cosa si ottiene? $10x = 1,61616\dots$, cioè $1,6\overline{1}$! Si scambiano le cifre del periodo! ...ma se moltiplichiamo ancora per 10 si ottiene $100x = 16,1\overline{6}$, e si torna alla stessa parte decimale del numero da cui siamo partiti.

Lascio immaginare alle lettrici e ai lettori come prosegue il percorso, e come si possono affrontare i numeri periodici misti; direi che una volta chiarito lo scopo *di trovare un opportuno multiplo di x che sia intero* non c'è bisogno di spiegare altro: si tratta di lasciare che i ragazzi e le ragazze si “sporchino le mani” indagando, sbagliando e correggendosi, fino a comprendere un metodo, che forse non sarà espresso come la famigerata regola libresca, ma che raggiungerà lo stesso scopo a prescindere da quella (e raccoglieranno, strada facendo, molti altri frutti...).

Saltiamo quindi queste fasi del percorso, e torniamo al problema di partenza: posto $x = 0,15384\overline{6}$, si moltiplica tutto per un milione, e si ottiene:

$$1000000x = 153846,15384\overline{6}$$

sottraendo si ottiene $999999x = 0,15384\overline{6}$, da cui $x = \frac{153846}{999999}$.

Come se fosse la cosa più naturale del mondo, ho chiesto di ridurre ai minimi termini la frazione. La richiesta ha creato sconcerto e curiosità... ma come si fa a scomporre in fattori dei numeri così grandi? Avevo già accennato a un metodo, utilizzato da Euclide, per calcolare il massimo comun divisore senza scomporre alcunché; utilizzando unicamente la proprietà distributiva, Euclide nei suoi Elementi (prop. 2 del libro VII) mostra come con una “discesa finita”, il massimo comun divisore compare da sé, avviando un “algoritmo” che utilizza come unica operazione la sottrazione²:

Ho due numeri: 999999 e 153846; dal maggiore sottraggo il minore e ottengo 846153;
ora ho tre numeri; scarto il maggiore, che è 999999;
mi rimangono due numeri: 846153 e 153846; dal maggiore sottraggo il minore e ottengo 692307;
ora ho tre numeri; scarto il maggiore, che è 846153;
mi rimangono due numeri.... E così via.

...a un certo punto...

... mi rimangono due numeri: 153846 e 76923; dal maggiore sottraggo il minore e ottengo....

Cosa ottengo? “Professore, la calcolatrice non me lo prende!”

“Fammi vedere”

² Per approfondire si possono trovare maggiori dettagli in M. Berni: "Euclide, i numeri naturali e la misura", Archimede, n.2/2006, pagg. 80-87.

“Vede, mi rimane il numero 76923 e non fa la sottrazione!”

“Guarda bene! Quanto fa $153846 - 76923$?”

“Ah... ma è il risultato!”

“Certo, $153846 - 76923$ fa proprio 76923! Ora hai tre numeri e scarti il maggiore, quali numeri restano?”

“76923 e 76923!”

“E qual è il loro massimo comun divisore?”

...

A questo punto, dopo avere scoperto (anche se non proprio dimostrato fino in fondo... ma partiamo da questa scoperta!) che il massimo comun divisore tra 999999 e 153846 è 76923, possiamo

riprendere la frazione $\frac{153846}{999999}$, dividere numeratore e denominatore per 76923, e ottenere la

frazione ridotta ai minimi termini, che è $\frac{2}{13}$.

Qualche riflessione finale. Spesso si considera la scomposizione in fattori primi come una *condizione necessaria* per il calcolo del massimo comun divisore di due numeri; cioè si scambia la *consuetudine* con una *necessità*. Ma ancora una volta *si fa matematica* se si mostra, con un'esperienza cognitiva che porta con sé lo stupore della scoperta, che quando un metodo raggiunge un certo scopo, si può solo dire che quel metodo è *sufficiente, ma non che è necessario*.

E' anche evidente la portata di questa constatazione nella costruzione di competenze di cittadinanza (o, se si preferisce, di “spirito critico”): non dare le cose per scontate, solo perché sono entrate nelle nostre abitudini; come spiega bene Dewey, questi non sono “pensieri”, ma “pregiudizi”³, e credere di pensare quando invece si sta facendo uso di pregiudizi è veramente l'ultima cosa di cui in questo momento storico abbiamo bisogno.

3 J. Dewey, “*Come pensiamo*”, pag. 66