insegnare
rivista del centro di iniziativa democratica degli insegnanti

Il suono delle funzioni goniometriche

di **Luigi Menna**[1]

0. Introduzione

Il secondo biennio degli istituti secondari di secondo grado offre una importante occasione che ogni docente di matematica e fisica non dovrebbe lasciarsi sfuggire: affrontare - contemporaneamente - lo studio delle funzioni circolari e delle onde.

Tale occasione va, secondo noi, colta al volo perché rappresenta una delle possibilità di fuggire la schizofrenia di entrare nella stessa classe una volta come docente di matematica e un'altra volta come docente di fisica, come se si trattasse di due persone diverse che si occupano di argomenti diversi. D'altra parte unire le due discipline rende possibile restituire il senso di uno studio, quello della goniometria, che spesso appare ben poco concreto e rinforza lo studio delle onde che, di contro, potrebbe dare l'impressione di mantenersi esclusivamente nel campo delle descrizione di fenomeni e modelli.

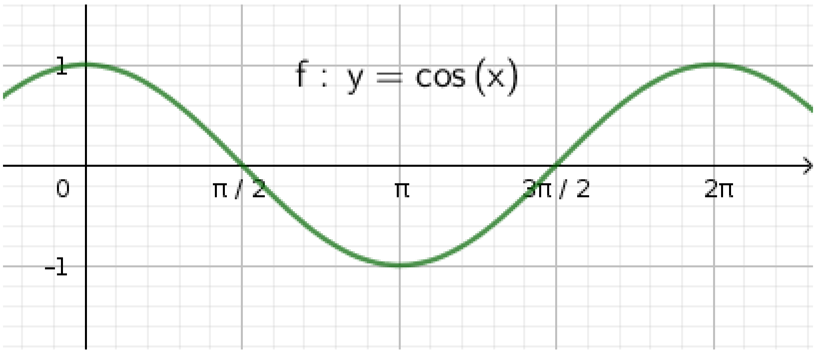
Tale approccio permette anche di riflettere in modo concreto sulla differenza tra parametro e variabile.

L'attività che proporremo farà uso del software didattico di geometria dinamica GeoGebra, un software gratuito multipiattaforma. Nel caso in cui la scuola non sia attrezzata di aula di informatica, è possibile usare la versione per tablet. In effetti esiste anche una comoda distribuzione per smartphone, che è utile per il primo passaggio ma non per il secondo.

[1] per il Gruppo di Studio di Didattica della Matematica del C.I.D.I. Palermo

1. Le trasformazioni

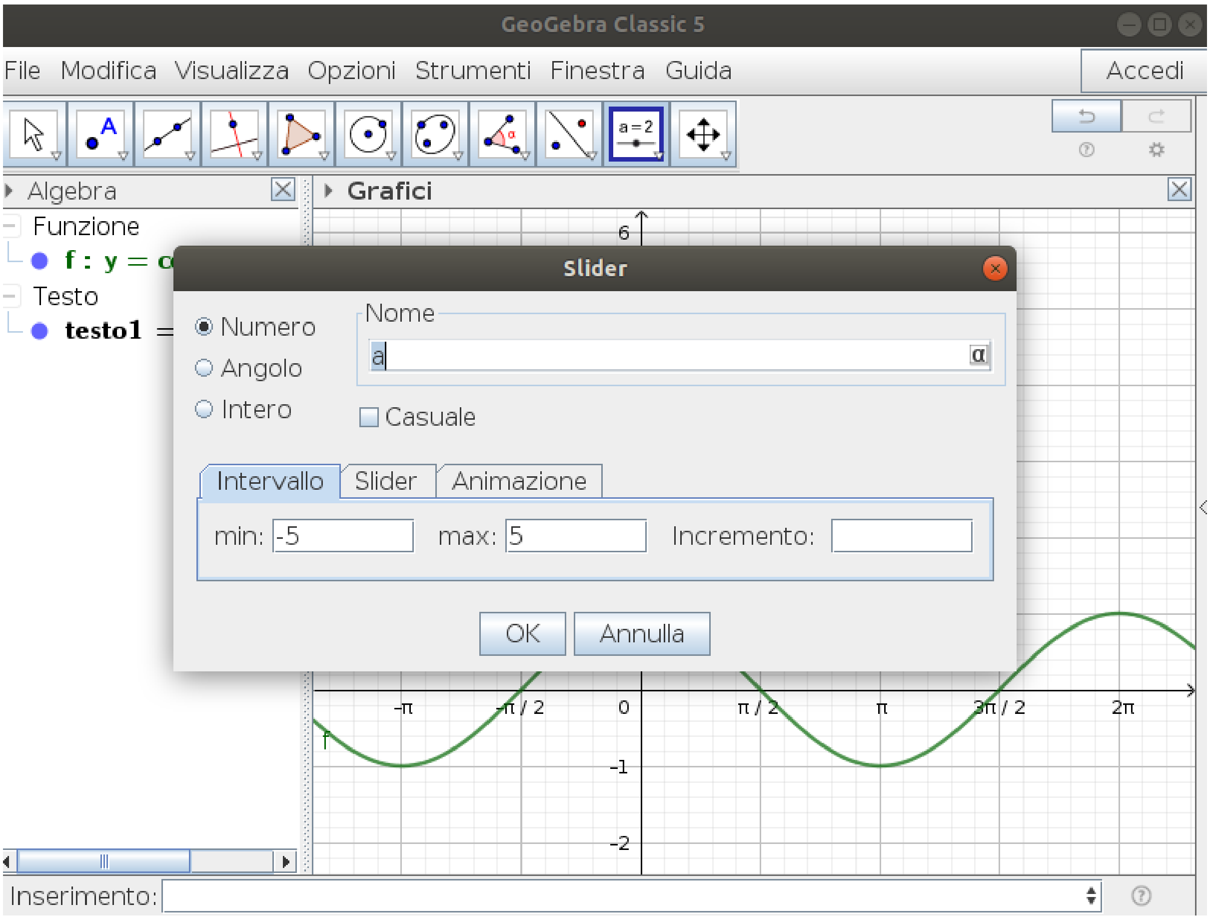
Partiamo dal presupposto che gli studenti abbiano già studiato la relazione tra angolo e valore del seno e del coseno in un cerchio goniometrico. E che sappiano rappresentarne le funzioni goniometriche. Per esempio:



Ovviamente lo studente sarà in grado di parlare del periodo della funzione, dell'ampiezza e degli zeri.

Gradualmente gli studenti potranno inserire dei parametri a questa funzione. Ad ogni parametro corrisponderà un preciso effetto.

Nel software i coefficienti potranno essere inseriti attraverso il comando *slider*. Per il momento accettiamo le impostazioni standard stabilite dal programma.

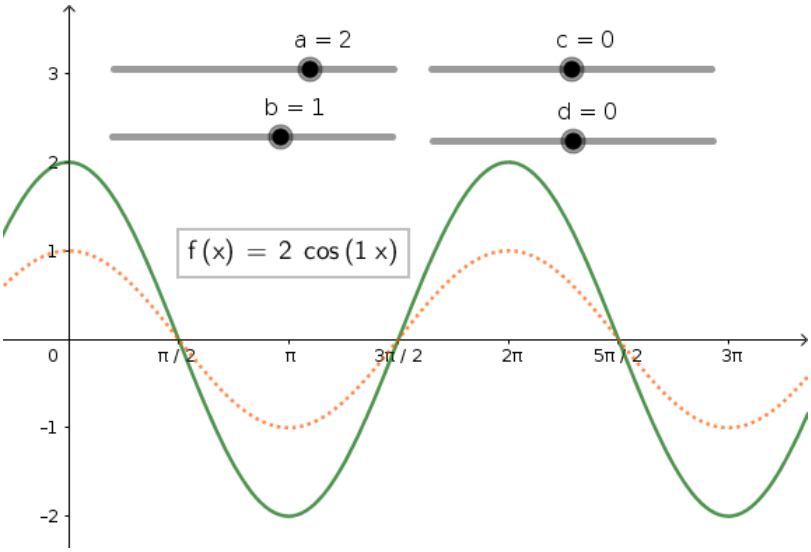


Creiamo i quattro *slider* relativi ai coefficienti presenti nella seguente funzione: *a, b, c, d* relativi alla seguente funzione

$$y = a \cdot cos(b \cdot x + c) + d.$$

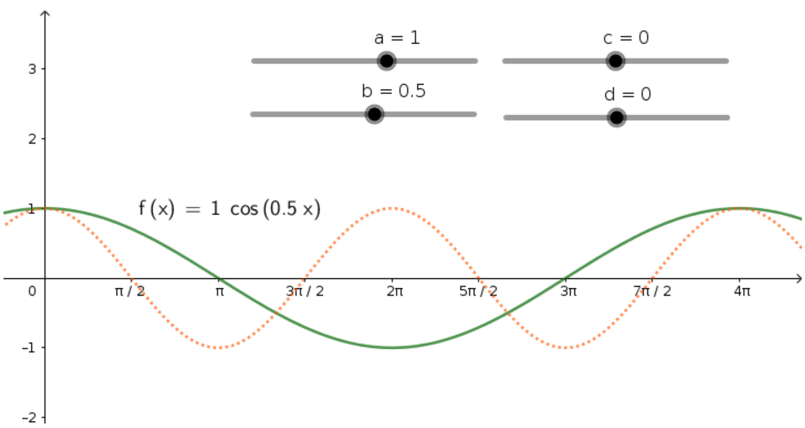
Nel caso $a = b = 1$ e $c = d = 0$ ovviamente la funzione rappresentata da GeoGebra tornerà ad essere la nostra ben nota cosinusoide.

Modificando i coefficienti otterremo invece le sue trasformazioni:



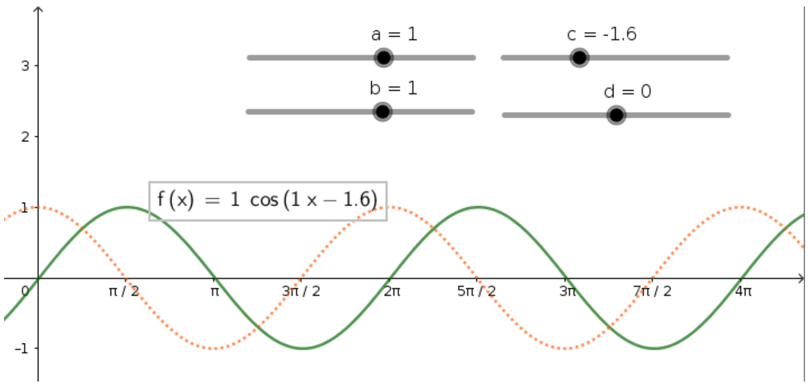
Se assegniamo ad *a*, per esempio, il valore 2 otteniamo quella che potremmo chiamare "dilatazione verticale". L'ampiezza dell'onda avrà valore 2: la funzione non è più limitata tra -1 e 1 bensì tra -2 e 2.

Osserviamo che il periodo della funzione non varia così come non variano gli zeri della funzione.

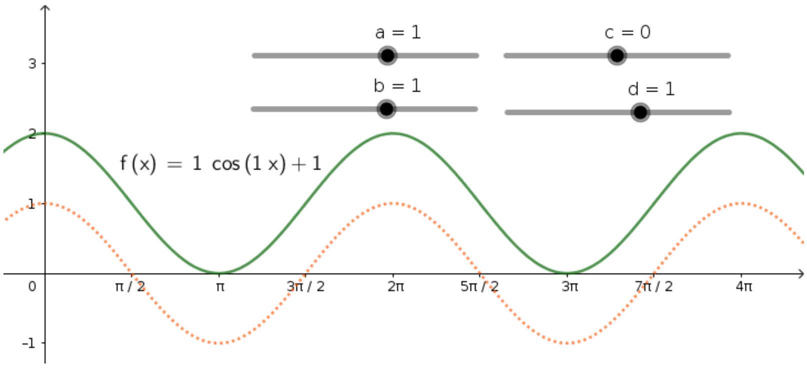


Se invece agiamo sul parametro *b* possiamo dilatare la funzione orizzontalmente. Ricordando che il periodo della funzione si calcola $T = 2 \cdot \pi / b$, otterremo (nel caso in figura per cui che *b*=0.5) il periodo 4π, cioè raddoppiato.

La curva si è allargata e, dunque, anche gli zeri della funzione hanno ascisse doppie rispetto a quelle della funzione iniziale.



Nell'esempio rappresentato a fianco abbiamo modificato il termine *c* assegnandogli ill valore -1.6. Al di là dell'inserimento del singolo valore è interessante vedere come al variare del valore dello slider la curva si sposta verso sinistra se *c* aumenta, verso destra se *c* diminuisce. Essendo 1.6 circa metà del valore di π, ci accorgeremo che seno e coseno sono ricavabili l'uno dall'altro attraverso una semplice traslazione. Ovviamente il periodo non varia.



Infine, spostando il valore *d* sullo slider, ci accorgeremo che al suo aumentare la curva trasla verso l'alto, mentre al suo diminuire verso il basso. In questo caso la funzione rappresentata è limitata tra 0 e 2. Il periodo non varia.

Ovviamente non occorre aspettare di affrontare le curve goniometriche per trattare le trasformazione delle funzioni. Anzi, sarebbe opportuno che già dagli anni precedenti gli studenti abbiano avuto occasione di lavorare su di esse.

Attraverso questa prima attività gli studenti hanno avuto modo di osservare il significato dei coefficienti. Ma che significato ha la *x*? E a quale fenomeno concreto possiamo far corrispondere parametri e variabile?

2. Il suono

Immaginiamo un finissimo granello di polvere sospeso in aria di fronte ad un altoparlante. Immaginiamo adesso che questo altoparlante entri in funzione e che cominci ad emettere suoni e noi siamo in grado di osservare il movimento del granello. Come ci immaginiamo il moto di tale particella?

Chi ha appena studiato il capitolo sulla teoria ondulatoria e sulle curve goniometriche sarà tentato di immaginare un moto (appunto) ondulatorio, sinusoidale. Invece, naturalmente, la particella dovrebbe oscillare, avanti e indietro, attorno ad una posizione di equilibrio. In sostanza, al variare del tempo, la particella va un po' avanti, torna indietro raggiungendo la posizione di equilibrio e torna ancora indietro e poi riparte riguadagnando ancora la posizione iniziale e così via finché l'altoparlante continua a funzionare.

Infatti il suono viene descritto come una vibrazione dell'aria provocato da un emettitore (nel nostro caso un altoparlante) e rilevato dal nostro orecchio.

Tutto ciò è modellizzato appunto da funzioni periodiche.

Cosa rappresentano allora parametri e variabili in tal caso?
Proviamo a far "suonare la funzione" che abbiamo appena descritto nel passaggio precedente utilizzando un comando presente in GeoGebra chiamata "suono". La sua sintassi è la seguente:

Suono(Funzione, Valore min, Valore max),

dove *funzione* è la funzione da associare al suono, mentre *valore min* e *valore max* definiscono la durata del suono in secondi.
Se è vero che il suono è modellizzabile attraverso una funzione goniometrica, allora potremmo proporre agli studenti di "suonare *cos(x)*". Vediamo cosa succede.

Digitiamo sulla barra inserimento la funzione già studiata:

$$y = a \cdot cos(b \cdot x + c) + d$$

e quindi

suono (f,0,10).

Ebbene non succede niente.
Ricordiamo allora cosa è (concretamente) un suono. Pensiamo ad una nota: il *la*. E' un suono che ha delle precise frequenze, per esempio *440 Hz*. Dunque l'aria oscilla attorno alla posizione di equilibrio 440 volte in un secondo.
Utilizziamo la relazione che abbiamo già incontrato nel primo passaggio:

$$T = \frac{2 \cdot \pi}{b},$$

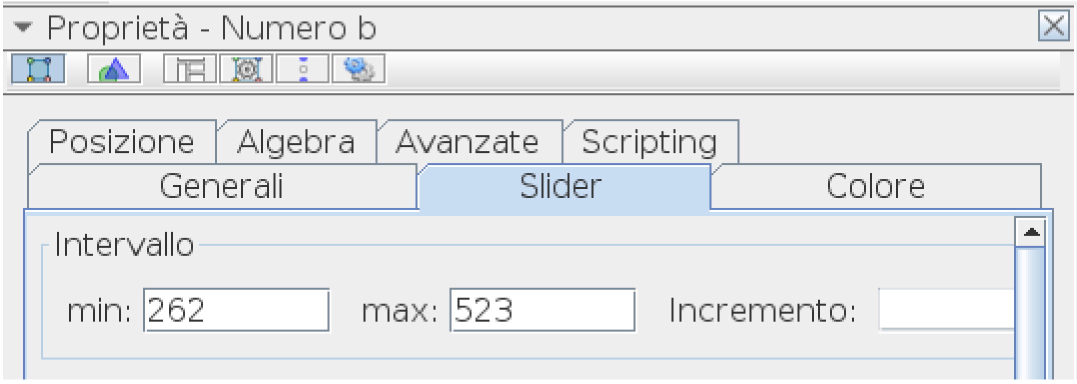
Siccome la frequenza *f* è l'inverso del periodo:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{b}{2 \cdot \pi}; b = 2 \cdot \pi \cdot f$$

Noi conosciamo già il periodo *T*. E' 440. Vogliamo invece conoscere il coefficiente *b* da inserire nella nostra funzione. Otteniamo:

$$b = 2 \cdot \pi \cdot 440.$$

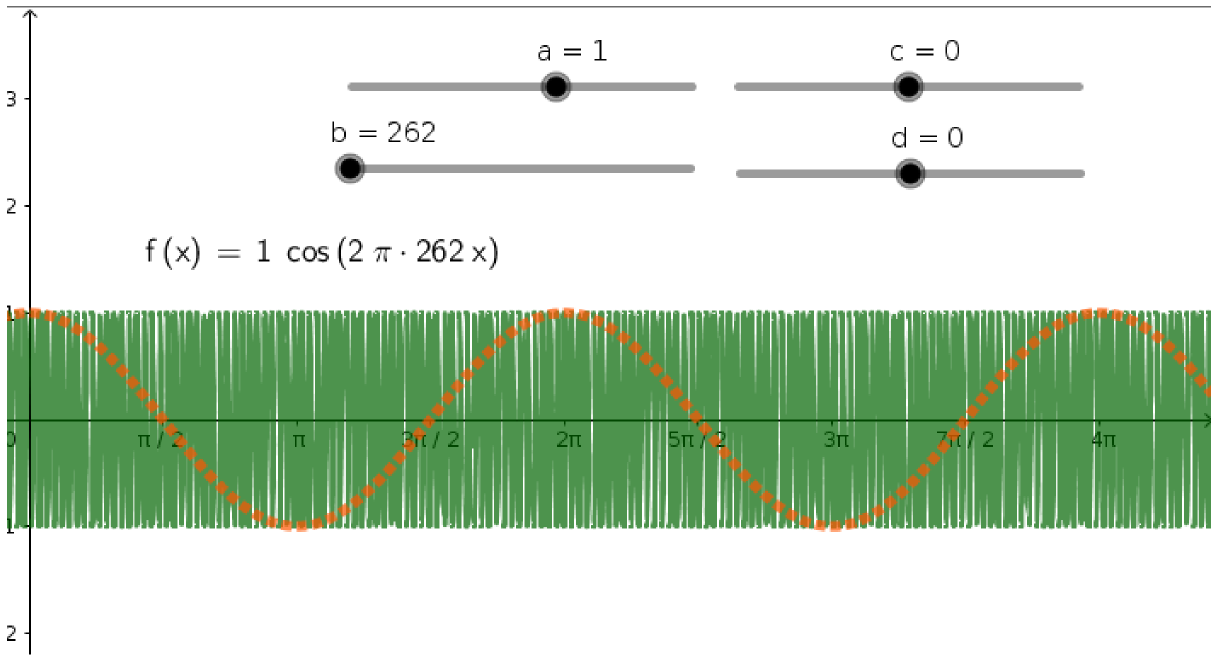
Per comodità possiamo reimpostare il valore dello slider. Facciamo variare tra 262 e 523, due frequenze della nota *do*.



La nostra funzione diventerà quindi:

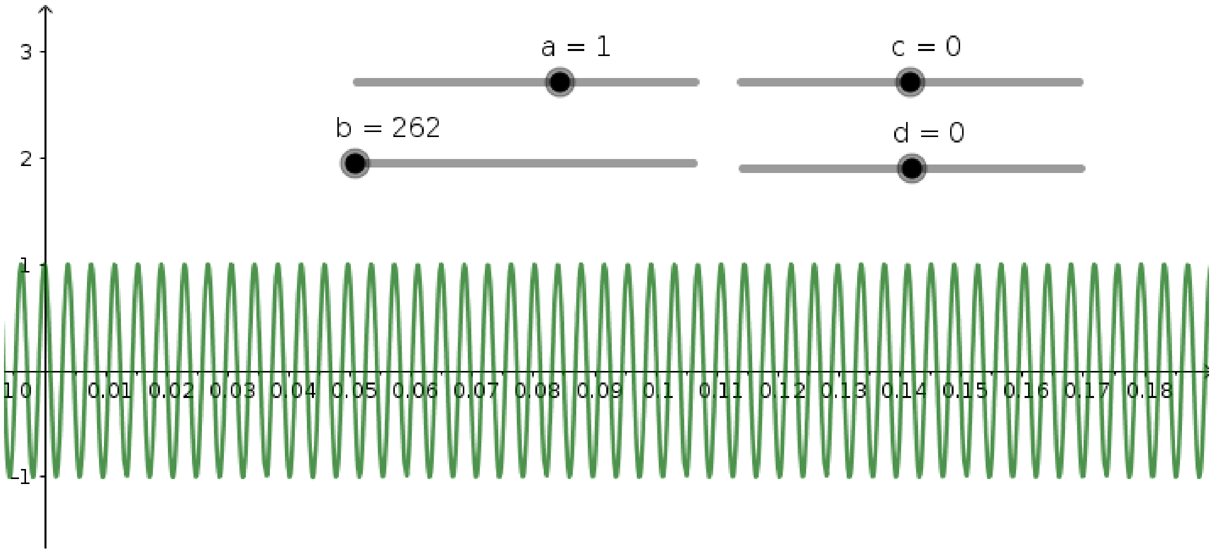
$$y = a \cdot cos(2\pi \cdot b \cdot x + c) + d$$

Ci accorgeremo subito che la funzione rappresentata sullo schermo assume un aspetto che non è più riconducibile alla funzione goniometrica. Eccola:



Lo schermo si riempie di un rettangolo colorato.

Cosa è successo? Semplicemente lo schermo si è riempito di una curva che ha una frequenza altissima rispetto alle funzioni che si disegnano solitamente sui libri di testo e negli esercizi. Si tratta quindi di allargare l'asse delle *x*. Perché sia nuovamente riconoscibile dovremo usare come unità di misura i centesimi.



Adesso che è di nuovo riconoscibile proviamo di nuovo a “farla suonare”.

suono (f,0,10).

Attraverso questo comando il nostro tablet emetterà un suono (per 10 secondi) della frequenza indicata dal parametro *b* indicato nel nostro slider. In sostanza i valori delle ascisse rappresentano il tempo. Dal grafico vedremo che già nel giro di 1 centesimo di secondo sono già avvenute diverse oscillazioni. Il dominio della funzione sarà, banalmente, l’intervallo di tempo in cui il nostro tablet emetterà il suono.

Effettivamente quando abbiamo usato il comando la prima volta, quando *b* poteva avere valori compresi tra -5 e 5 , semplicemente non era possibile udire quei suoni: il nostro orecchio non avverte infatti frequenze così basse.

Il parametro *b* invece è utile per stabilire la frequenza del suono da emettere.

È interessante far sperimentare la variazione del suono al variare del parametro *b*. Si avvertirà infatti la successione di varie frequenze e quindi - spostando lo slider dal valore 262 a 523 - da un *do* al *do* dell’ottava successiva.

Se invece, tenendo, costante il valore di *b*, si agirà sul valore di *a,* si avvertirà una diversa intensità del suono. Agire su *a* equivale a decidere il volume con cui il nostro tablet emetterà il suono.

Agire sugli altri due coefficienti, per ora, sembra non avere alcun effetto. Servirà (in un altro articolo, per un’altra attività) quando dovremo gestire più suoni e li faremo produrre insieme.

Conclusioni

Il software GeoGebra, usato attraverso il dispositivo digitale, ha permesso di far lavorare gli studenti direttamente sui parametri. La manipolazione è ovviamente mediata da uno strumento; il ruolo dell'insegnante risulta essere fondamentale perché deve mediare correttamente il significato di ogni gesto.

In particolare lo studente, attraverso un gesto sul dispositivo, è in grado di modificare i coefficienti e, contemporaneamente, vedere il grafico della funzione e ascoltare un suono.

Di fatto il gesto che si compie sul tablet è analogo a quello di pigiare un tasto di una tastiera. Oppure quello di alzare il volume attraverso dei pulsanti.

Crediamo che tale analogia sia da evidenziare in quanto restituisce significato ai tanti esercizi che gli studenti svolgono durante gli anni scolastici.

Bibliografia

Bartolini Bussi, M.G., Ferri, F, Mariotti, M.A. (2005). L'educazione geometrica attraverso l'uso degli strumenti: un esperimento didattico, in *L'insegnamento della Matematica e delle scienze integrate,* vol. 28A (2), 161-189.

Bartolini Bussi, M.G., Maschietto, M. (2005). Wor king with artefacts: the potential of gestures as generalization devices. Research Forum: Gesture and the Construction of Mathematical Meaning, in *Proceedings of the 29th Conf. of the Int. Group for the Psycology of MAthematics Education*, Melbourne, Australia, vol. 1, 131-134

Giusti, E. (1999). Ipotesi sulla natura degli oggetti matematici, Bollati Boringhieri.

Parole chiave
secondaria secondo grado, musica, goniometria, teoria ondulatoria, variabili, parametri, matematica e fisica, realtà.