Matematica è(v)viva 3

Didattica della matematica fra comunicazione, problem solving e intelligenza artificiale

Atti del convegno

C.I.D.I. Palermo e PalermoSCIENZA

Incontri di formazione per insegnanti di matematica di ogni ordine e grado

Febbraio–maggio 2026



Locandina del ciclo di incontri "Matematica è(v)viva 3".

Indice

Introduzione

1. **Gilberto Bini** – Dall'insegnamento dinamico di Federigo Enriques all'intelligenza artificiale generativa
2. Luigi Menna – Pensare vs/imitare: nuove forme di interazione in classe con l'intelligenza artificiale (rielaborazione dell'intervento del prof. **Ferdinando Arzarello**)
3. Luigi Menna – Matematica e problemi: tradurre, rappresentare, risolvere (rielaborazione dell'intervento del prof. **Bruno D'Amore**)
4. **Carmen Bisignani, Grazia Mazzeo** – Non è il testo a fare il problema: un laboratorio sulla distinzione fra problema ed esercizio in matematica
5. **Cesare Rao Camemi** – Scuola e intelligenza artificiale: quale matematica?
6. **Gaetana Serenella Bartolomei, Paola Brigaglia** – Dalle regolarità geometriche alla stima di superfici reali: un'esperienza con il "Quadrato affettato" e la piazza del Cre.Zi. Plus
7. **Giulia Cordone, Luigi Menna** – Insegnare geometria con le mani: un approccio operativo fra piegature, scacchiere e corde

www.insegnareonline.com

Introduzione

a cura di **Gabriele Amore, Gaetana Serenella Bartolomei, Carmen Bisignani, Paola Brigaglia, Giulia Cordone, Grazia Mazzeo, Luigi Menna, Cesare Rao Camemi**

Il ciclo di incontri "Matematica è(v)viva 3 – Didattica della matematica fra comunicazione, problem solving e intelligenza artificiale", promosso dal C.I.D.I. di Palermo in collaborazione con PalermoSCIENZA, si è sviluppato fra febbraio e maggio con cinque appuntamenti rivolti a insegnanti di matematica di ogni ordine e grado. Il percorso, come indicato nella locandina del convegno, ha preso avvio il 25 febbraio con un incontro introduttivo alla tematica curato dal gruppo di ricerca del C.I.D.I. Palermo, per poi proseguire con quattro interventi di relatori esterni, ciascuno dedicato a un diverso snodo del rapporto fra didattica della matematica, comunicazione, risoluzione di problemi e intelligenza artificiale: Ferdinando Arzarello (Università degli Studi di Torino) il 10 marzo, con una riflessione su "Pensare vs/imitare: nuove forme di interazione in classe con l'IA"; Bruno D'Amore (membro dell'Accademia delle Scienze di Bologna) il 1° aprile, sul tema "La risoluzione dei problemi nella Scuola Primaria e Secondaria di Primo Grado"; Gilberto Bini (Università degli Studi di Palermo) il 28 aprile, con il contributo "Un ponte tra l'insegnamento dinamico di Enriques e l'intelligenza artificiale"; e Nicoletta Lanciano (Sapienza Università di Roma) il 5 maggio, su "Ragionare per casi limite nella realtà legata all'astronomia a partire dalla geometria di Emma Castelnuovo". Il percorso si è chiuso a fine maggio con un incontro conclusivo curato dal C.I.D.I. Palermo e da PalermoSCIENZA.

Come previsto dal progetto formativo, ogni incontro è stato accompagnato da un'attività laboratoriale condotta dal gruppo di ricerca del C.I.D.I. di Palermo (G. Amore, G. S. Bartolomei, C. Bisignani, P. Brigaglia, G. Cordone, G. Mazzeo, L. Menna, C. Rao Camemi), con l'obiettivo di tradurre in pratica didattica concreta gli spunti teorici emersi nelle relazioni. Il presente volume raccoglie sette contributi scaturiti da questo percorso, restituendone la duplice anima teorica e laboratoriale.

Il volume si apre con il saggio di Gilberto Bini, che rilegge l'*Insegnamento dinamico* di Federigo Enriques alla luce delle più recenti sollecitazioni dell'intelligenza artificiale generativa, riprendendo e ampliando i contenuti dell'intervento tenuto il 28 aprile. Seguono due contributi a firma di Luigi Menna, elaborati a partire dalle conferenze dei relatori esterni. Il primo, rivisto e approvato da Ferdinando Arzarello, ripercorre l'intervento del 10 marzo su "Pensare vs/imitare": a partire da un esperimento didattico sul teorema di Varignon, in cui GeoGebra e ChatGPT sono orchestrati dall'insegnante, discute il passaggio dall'evidenza empirica alla dimostrazione e la possibilità di "imitare per pensare". Il secondo riprende l'intervento di Bruno D'Amore del 1° aprile su "Matematica e problemi" e la sua riflessione sul ruolo dei problemi e delle rappresentazioni semiotiche nell'apprendimento matematico.

Al tema del problema è dedicato anche il contributo laboratoriale di Carmen Bisignani e Grazia Mazzeo, che, a partire da un'esperienza di formazione con docenti di diversi ordini scolastici, interroga la distinzione fra problema ed esercizio e mostra come la natura problematica di un compito dipenda dal rapporto fra il soggetto, il contesto e le conoscenze disponibili. Cesare Rao Camemi raccoglie poi, in forma di appunti ragionati, alcune riflessioni sul rapporto fra scuola e intelligenza artificiale, maturate nell'ambito del gruppo di ricerca del C.I.D.I. di Palermo. Il contributo di Gaetana Serenella Bartolomei e Paola Brigaglia presenta due esperienze laboratoriali complementari: il "Quadrato affettato", ponte fra la percezione visiva e la generalizzazione algebrica, e la stima della capienza della piazza adiacente al Cre.Zi. Plus, ai Cantieri Culturali alla Zisa, affrontata come problema aperto di modellizzazione. Chiude il volume il contributo di Luigi Menna e Giulia Cordone, che sistematizza le attività di geometria operativa proposte durante uno dei laboratori del corso, nella tradizione pedagogica di Emma Castelnuovo – un filo che si riallaccia idealmente anche all'intervento di Nicoletta Lanciano del 5 maggio.

www.insegnareonline.com

Nel loro insieme, i sette contributi restituiscono il filo conduttore dichiarato dal titolo del convegno: una didattica della matematica che si gioca fra comunicazione – intesa come traduzione fra registri e rappresentazioni semiotiche diverse –, problem solving inteso come attività di pensiero autentica e non come mera esecuzione procedurale, e intelligenza artificiale, da affrontare non con timore né con acritico entusiasmo, ma con la consapevolezza critica e la responsabilità che solo la formazione dei docenti può garantire.

www.insegnareonline.com

1. Dall'insegnamento dinamico di Federigo Enriques all'intelligenza artificiale generativa[1*]

Gilberto Bini[2]

Abstract

Riprendiamo qui il filo delle idee di Federigo Enriques sull'insegnamento e l'apprendimento della matematica esposte nel 1921 nella nota Insegnamento dinamico per riflettere sulla loro attualità, anche alla luce delle nuove, tante (forse troppe), sollecitazioni derivanti dal mondo dell'intelligenza artificiale generativa (GenAI). Ora, come allora, risulta quanto mai cruciale il ruolo del docente, soprattutto nel contemperare vari tipi di intelligenze, fra cui quella artificiale.

1. Introduzione

Federigo Enriques (1871–1946) fu illustre matematico, filosofo ed epistemologo, storico della scienza ed esperto di problemi di didattica. La sua riflessione sull'insegnamento e l'apprendimento della matematica è estremamente attuale e la sua perenne vitalità si manifesta nella visione proposta in *Insegnamento dinamico*, la celebre prefazione della serie IV del *Periodico di Matematiche* del 1921 (Enriques, 1921; si veda anche Enriques, 2003).

Per comprendere se le idee di Enriques siano valide ancora oggi, è necessario avere un'idea, in particolare dal punto di vista della didattica, delle mutate condizioni al contorno che richiedono di prendere in considerazione anche i più recenti strumenti di intelligenza artificiale.

Dare un quadro dello stato dell'arte dell'IA nell'ambito dell'istruzione è alquanto complicato, perché i campi della sua possibile applicazione e le sfaccettate potenzialità stanno aumentando in tempi così rapidi che si fatica a tenere il passo. Già altri autori hanno iniziato a indagare questi temi di grande rilevanza: si vedano, ad esempio, Clark (2025), Fontana e Toffalori (2025) e Paola (2025), ma non sono i soli. Qui ci rifacciamo a uno degli ultimi documenti ufficiali, cioè al rapporto OCSE dal titolo *OECD Digital Education Outlook 2026: Exploring Effective Uses of Generative AI in Education* (OECD, 2026), in cui peraltro ci si occupa di numerosi problemi pedagogici di carattere generale, non legati direttamente alla matematica. Nel prossimo paragrafo ne illustriamo alcuni invitando comunque i lettori interessati a dare un'occhiata alla fonte originale, suddivisa in tre parti, con i suoi numerosi spunti e le sue analisi statistiche e comparative, spesso sorprendenti. Nella prima parte viene trattato il tema dell'apprendimento da parte degli studenti; nella seconda la funzione che può svolgere l'intelligenza artificiale generativa come supporto all'insegnamento; infine viene presentato un quadro sulle possibilità di miglioramento delle attività istituzionali e organizzative nell'ambito dell'istruzione.

Nel paragrafo 3 di questo lavoro rileggeremo invece alcuni passaggi tratti da *Insegnamento dinamico* e li interpreteremo in chiave moderna offrendo una serie di spunti di riflessione e di proposte a livello culturale, storico e didattico con cui speriamo di far emergere l'importanza – ancora oggi – dell'apprendimento attivo e del ruolo cruciale che il docente è chiamato a ricoprire, proprio perché è un essere umano e non un tutor cibernetico!

2. Dal rapporto OCSE

La GenAI è un sottoinsieme dell'intelligenza artificiale che si prefigge di produrre nuovi contenuti, ad esempio, testi, immagini, video, canzoni, equazioni matematiche, programmi per computer ecc., in

---

1* Parte del contenuto di questo contributo è stata oggetto della conferenza tenuta dall'autore il 28 aprile 2026 nell'ambito del ciclo di incontri "Matematica è(v)viva 3", promosso dal C.I.D.I. di Palermo e da PalermoSCIENZA.

2 Dipartimento di Matematica e Informatica, Università degli Studi di Palermo.

risposta a una sollecitazione (traduzione letterale del vocabolo inglese che viene generalmente usato, cioè prompt) che di solito consiste in una serie di domande o di comandi sulle varie chatbot, come, fra i più usati, OpenAI ChatGPT, Google Gemini, Claude nelle loro varie versioni.

Sebbene ci siano naturalmente differenze a seconda dei paesi membri dell'OCSE, il rapporto a cui ci stiamo riferendo rivela che l'utilizzo dell'intelligenza artificiale generativa da parte degli studenti è in crescita, soprattutto per ricerche di carattere generale, per la comprensione e la stesura di testi, anche come scorciatoia per completare i compiti a casa. Ovviamente, per quanto riguarda il primo ciclo di istruzione, l'utilizzo degli strumenti di GenAI è ancora moderato, specialmente alla primaria. Al contrario, per quanto riguarda il secondo ciclo di istruzione, gli studenti li usano in larga maggioranza e regolarmente.

Se da un lato l'intelligenza artificiale generativa potrebbe avere le potenzialità di migliorare il rendimento degli studenti nel loro percorso formativo, dall'altro lato è stato rilevato che non porta necessariamente a miglioramenti nell'apprendimento, come rivela la diminuzione di coinvolgimento attivo da parte degli studenti in seguito a una sorta di "inondazione" di risposte a qualsiasi tipo di prompt. Infatti, in molti casi si assiste a rischi di pigrizia metacognitiva che ostacola l'acquisizione di competenze a lungo termine.

Inoltre, è stato osservato che gli studenti possono produrre risultati di notevole qualità quando usano alcuni di questi strumenti, ma che in loro assenza non riescono a mantenere lo stesso livello: infatti, l'uso non mirato e inadeguato di tali strumenti non permette di consolidare abilità e competenze, che fanno la differenza in un processo di apprendimento a lungo termine. Ad esempio, un esperimento sul campo in Turchia (Bastani et al., 2024) ha rivelato che, mentre l'accesso a ChatGPT-4 ha migliorato le prestazioni a breve termine (del 48% con l'interfaccia standard e del 127% con una versione di tutoraggio progettata per supportare l'apprendimento), le prestazioni degli studenti sono calate del 17% rispetto a quelle che avevano prima di aver utilizzato ChatGPT-4, una volta che non avevano più accesso alla chatbot.

D'altra parte, l'integrazione delle competenze e dell'esperienza dei docenti con gli strumenti di intelligenza artificiale generativa, se utilizzati con scopi pedagogici mirati, quali i piani di potenziamento individuale, le attività di recupero personalizzato, l'acquisizione di competenze specifiche, la progettazione di attività interdisciplinari, tendono a mostrare (si veda, ad esempio, Doshi e Hauser, 2024) miglioramenti duraturi nell'apprendimento superando di gran lunga i risultati che la progettazione didattica tradizionale e l'uso dell'intelligenza artificiale potrebbero conseguire separatamente.

3. Da *Insegnamento dinamico*

Prima di entrare nel dettaglio di questa breve, ma significativa, pubblicazione, ci sembra importante sottolineare come il pensiero di Enriques si integri molto bene con i modelli cognitivi ed epistemologici studiati nell'ambito dell'intelligenza artificiale, in particolare quella generativa.

Come ricordato da Castelli Gattinara (2017), il principio portante della visione epistemologica di Enriques è proprio la rilevanza dell'errore. Su di esso si fondano sia la teoria dell'approssimazione della conoscenza (benché mai approssimativa) sia le ragioni della sintesi, o unità del sapere, e il carattere imprescindibile della storia delle scienze.

La GenAI impara da un dataset prestabilito mediante apprendimento automatico. Un modello di IA non "possiede" la verità, ma costruisce una rappresentazione del mondo raffinandola continuamente, come nella gnoseologia di Enriques, attraverso metodi matematici di approssimazione, quali ad esempio la discesa del gradiente.

I Large Language Models (LLM) sono in grado di comunicare con una certa fluidità e, usando i prompt giusti, hanno dimostrato di possedere un modello rudimentale del mondo e alcune semplici capacità

www.insegnareonline.com

di ragionamento. D'altra parte, studi recenti (Kommrusch e Minsky, 2025) hanno mostrato che le macchine possono formulare ipotesi sul mondo e scoprire nuove correlazioni imparando dall'esperienza in modo costruttivista.

Questi modelli si trovano in difficoltà a formulare risposte quando non hanno a disposizione una quantità sufficiente di dati proveniente da un solo dataset. Non riescono infatti a incrociare dati e a considerare possibili relazioni fra diversi modelli. Sono vincolati da una "logica in piccolo" e non da una "logica in grande" che permette, come scrive lo stesso Enriques in *Insegnamento dinamico*, lo studio delle connessioni organiche del sistema, cioè una veduta macroscopica. Manca inoltre a questi modelli una capacità di sintesi che sta però facendosi strada nelle più recenti ricerche di IA cognitiva (Bundy et al., 2023).

Infine, l'intelligenza artificiale generativa è soggetta a malfunzionamento. Come illustrato da Floridi et al. (2015), è possibile distinguere tra nozioni di malfunzionamento "negative" e "positive". Un malfunzionamento negativo, o disfunzione, si verifica quando la GenAI non fa o non può fare ciò che dovrebbe senza alcun output. Un malfunzionamento positivo, o errore di funzionamento, si verifica quando non fa ciò che dovrebbe e produce effetti indesiderati e non intenzionali, a volte chiamati allucinazioni. Questo tipo di errori può essere corretto e superati come quelli di cui parlava Enriques nel processo della conoscenza che diventa via via più obiettiva, così come il dialogo con il mezzo cibernetico può diventare sempre più chiaro e sostanziato.

3.1 La visione dinamica della storia

Uno degli aspetti fondamentali di *Insegnamento dinamico* è dichiarato nella sua conclusione dove Enriques rimarca la necessità di presentare la matematica e le idee scientifiche nel contesto storico che le ha generate, precisamente:

> «… Ad una condizione però: che di ogni dottrina si studi le origini, le connessioni, il divenire, non un qualsiasi assetto statico; e però che un grado di verità più alto serva ad illuminare il più basso da cui è uscito; che insomma – dopo avere studiato la scienza – ce ne valiamo per comprendere la storia. Quale modo più largo di comprensione, quale più vasta esperienza didattica, che l'annodarsi di problemi e l'urtarsi delle difficoltà entro lo spirito di tutti gli studenti, che hanno faticato prima di noi nella scuola del mondo?»

L'annodarsi di problemi e il susseguirsi degli errori fatti e superati dovrebbero ispirare anche la didattica della matematica, come scrive Enriques. Il processo storico dovrebbe educare a non farsi convincere da verità dogmatiche perché quelle che in un certo momento, o periodo storico, ci potrebbero sembrare verità assolute potrebbero essere addirittura messe in discussione in un altro momento a causa delle diverse condizioni da prendere in considerazione.

Non si tratta quindi di una storia fatta da una successione di eventi cronologici, ma di idee, motivazioni, connessioni, che ci aiutano a vedere come le difficoltà degli studenti di oggi sono state, eventualmente in altra forma, quelle degli studenti del passato che hanno faticato nella scuola, e probabilmente lo saranno anche di quelli del futuro. In aggiunta, il processo storico mostra come le idee matematiche non nascono all'improvviso, ma maturano via via lungo un percorso di progressiva precisazione seguendo direzioni che dipendono anche dal contesto culturale e sociale nel quale si sviluppano.

A questo proposito, *La storia della matematica in classe* (Ballocco et al., 2025) è un volume della collana "I quaderni di MathUp", uscito nel 2025, che si propone di offrire un testo storico-matematico per accompagnare l'esposizione di alcuni argomenti di matematica e fisica comunemente svolti in una classe terza di un liceo scientifico, mentre altri vengono proposti come eventuale approfondimento: fra i primi, per menzionarne qualcuno, la nascita della geometria analitica con uno sguardo a quella dello spazio, le coniche e alcuni modelli per la comprensione del moto dei pianeti; fra i secondi il concetto di funzione nel Seicento e i primi passi della geometria proiettiva con Girard Desargues.

www.insegnareoline.com

In Italia, l'importanza della storia nell'insegnamento delle scienze era già stata oggetto di riflessione prima di Enriques da parte di Gino Loria (1862–1954) e Giovanni Vailati (1863–1909): si veda, ad esempio, Giacardi (2013) per un excursus storico articolato.

Loria attribuisce importanza alla storia delle matematiche elementari soprattutto nella formazione degli insegnanti in modo da stabilire un collegamento tra l'insegnamento secondario e quello superiore. Dal canto suo, Vailati (1897) scrive:

> «A nessuno che abbia avuto occasione di trattare in iscuola, davanti a dei giovani, qualunque soggetto che si riferisca alle parti astratte e teoriche della matematica, può essere sfuggito il rapido cambiamento di tono che subisce l'attenzione e l'interessamento degli studenti ogni qualvolta l'esposizione … lascia luogo a delle considerazioni d'indole storica… Di questo appetito sano e caratteristico delle menti giovani … è certamente desiderabile trarre il maggior partito possibile. Utilizzarlo intelligentemente vuol dire rendere l'insegnamento più proficuo e nello stesso tempo più gradevole, più efficace e insieme più attraente».

In questa citazione emerge quanto sia importante una narrazione accattivante e quale tipo di ascendente abbiano i narratori ai fini di una comunicazione efficace della matematica e delle biografie dei matematici, delle loro "storie" nella storia, a volte controverse, a volte intriganti per il loro impegno civile e politico.

Un recente esempio rivolto al mondo della scuola è il progetto "Le donne fanno scienza", realizzato da CASIO in collaborazione con il Ministero dell'Istruzione e del Merito, che si pone l'obiettivo di valorizzare il contributo di grandi scienziate per fornire occasioni di approfondimento delle STEAM con laboratori per la scuola secondaria di primo e secondo grado. Un esempio, invece, rivolto anche al grande pubblico, è il libro *Matematici in prima linea* (Di Sieno e Guerraggio, 2021), che si presta a raccontare un'originale storia d'Italia, dalle guerre risorgimentali agli anni '70–'80 del secolo scorso, attraverso la vita e la testimonianza di matematici impegnati in prima linea. Un terzo esempio, ma la lista potrebbe continuare, è il progetto "Donne nella Scienza", curato da Silvia Gambarini, che racconta le storie di scienziate famose e delle numerose difficoltà che hanno dovuto affrontare per portare avanti le loro ricerche e i loro sogni.

3.1.1 Alcuni esempi di percorsi didattici

In questo paragrafo proviamo a dare alcuni suggerimenti concreti di percorsi integrati di storia e didattica in cui il supporto dell'intelligenza artificiale generativa viene incontro all'apprendimento attivo con l'obiettivo di coltivare e far crescere la curiosità e non la pigrizia metacognitiva, come messo in evidenza dal rapporto OCSE.

Abbiamo posto alla chatbot Google Gemini 3.0 la domanda "quanto fa 1.024 per 1.024?". La sua risposta comincia così:

> «Il risultato di 1.024×1.024 è 1.048.576».

Il quadrato di 1.024 può far riflettere sulla differenza fra approssimazione e precisione di un'operazione aritmetica e sui contesti in cui è richiesta la precisione e su quelli in cui è sufficiente un'approssimazione adeguata. Ad esempio, ben diverso è un contesto come quello di lanciare una navicella nello spazio, in cui è importante la precisione, rispetto a quello in cui si chiede di stimare un ordine di grandezza.

Osserviamo anche che l'IA non è soltanto una calcolatrice, ma fornisce ulteriori spunti che potrebbero essere eventualmente utilizzati dal docente, come in questo caso in cui Gemini inserisce nella risposta qualche informazione sul quadrato di 1.024 nell'ambito della tecnologia informatica che forse non sarebbe venuta subito in mente a chi voleva calcolare il risultato della moltiplicazione. Riportiamo qui sotto il testo della risposta.

www.insegnareonline.com

> «Se ti stai occupando di informatica o tecnologia, questo numero ti risulterà familiare: rappresenta esattamente 1 Mebibyte (MiB), spesso chiamato comunemente 1 Megabyte nel contesto della memoria RAM o dello storage».

Potrebbe essere uno spunto per indagare le unità di misura (Terabyte, Gigabyte, Petabyte, Megabyte ecc.) e iniziare un collegamento con questioni di tecnologia, ad esempio in una scuola secondaria di primo grado, potenziando le competenze trasversali degli alunni.

La chatbot continua scrivendo:

> «Ecco una breve scomposizione per contestualizzarlo: in potenze di 2: $2^{10} \times 2^{10} = 2^{20}$; in termini di dati: 1.048.576 byte».

Sebbene la digitazione dei prompt possa sembrare una naturale evoluzione dell'apprendimento attivo decantato da Enriques al punto da rendere completamente indipendente lo studente, in realtà, come ricorda anche il rapporto OCSE, il ruolo del docente nell'utilizzo dell'intelligenza artificiale – di qualsiasi tipo – non può e non deve venire meno.

In questo esempio, è proprio il docente che mette in evidenza come la moltiplicazione si riduce alla somma degli esponenti delle potenze di 2. A seconda del livello scolare, si potrebbe quindi cogliere la palla al balzo per progettare, tanto per fare qualche esempio, un percorso sulle proprietà delle potenze invitando gli alunni a riflettere, ad esempio, sulla differenza tra il quadrato di 2^{10} e il suo doppio. Si potrebbe anche parlare di ordini di grandezza e di equivalenze fra unità di misura con applicazioni anche alle scienze, specialmente nella secondaria di primo grado.

In un triennio della secondaria di secondo grado, il passaggio dalla moltiplicazione alla somma potrebbe dare l'abbrivio per introdurre i logaritmi e le loro proprietà, non soltanto da un punto di vista didattico ma anche storico, con ricerche su John Napier (1550–1617) e Henry Briggs (1561–1630) che introdussero i logaritmi per avere uno strumento di calcolo più veloce ai fini delle ricadute pratiche sulla navigazione nell'era delle scoperte geografiche: si vedano, ad esempio, Bini (2023; 2024).

Continuando il nostro esperimento, abbiamo poi digitato un altro prompt più generico: "Come si approssima π?". In qualsiasi situazione reale (dalla misura della circonferenza di una pizza a situazioni più sofisticate) viene infatti sempre usata un'approssimazione, e può essere interessante, seppur non così semplice, comprendere quale approssimazione sia più opportuna a seconda della situazione che si presenta.

Questo prompt ha generato una risposta articolata, meno precisa, da parte di Gemini, di cui riportiamo e commentiamo alcuni passaggi.

> «Visto che π è un numero infinito, non potremo mai scriverlo tutto. Per millenni, i matematici hanno cercato scorciatoie per "intrappolarlo" tra due valori sempre più vicini».

Come abbiamo già osservato, specialmente nel primo ciclo di istruzione dove l'uso di GenAI è ancora moderato, come sottolineato dal rapporto OCSE, il docente potrebbe iniziare a domandare se l'output del prompt è corretto ascoltando le risposte e tirando le fila del discorso. Infatti l'aggettivo "infinito" non è corretto in questo contesto, mentre lo sarebbe la dicitura "illimitato non periodico". In questo modo, l'accento posto dal docente sulla rilettura attenta del testo potrebbe aiutare gradualmente lo studente a confrontarsi con i testi generati dall'intelligenza artificiale in maniera più critica e consapevole.

Ricordiamo che anche una macchina, non solo gli esseri umani, utilizzerà sempre un'approssimazione di π, per quanto potente sia la sua capacità di calcolo. Questo potrebbe essere uno spunto interessante per iniziare una discussione "filosofica e matematica" sulla differenza tra le possibili approssimazioni dell'infinito da parte dell'intelligenza umana e quella di una macchina.

La risposta di Gemini continua dicendo: «Ecco i metodi più famosi, dal più antico al più moderno».

www.iisenriquesmilne.com

La risposta fornisce uno spunto, probabilmente non nelle intenzioni di chi ha formulato il prompt, che però non è male assecondare per inquadrare da un punto di vista storico il problema dell'approssimazione di π, fornendo qualche esempio in periodi storici diversi. Questo potrebbe essere il punto di partenza per una ricerca più approfondita che segua gli spunti di questa risposta oppure ne ricerchi altri. Ancora una volta, è indispensabile una figura di riferimento come il docente perché nel mare magnum delle informazioni dell'IA, ma anche di quelle dei più comuni motori di ricerca, lo studente potrebbe letteralmente confondersi e perdere di vista i contenuti essenziali.

> «Il Metodo di Archimede (Geometria). Archimede non aveva calcolatrici, quindi usò i poligoni. Immagina di disegnare un cerchio e di "chiuderlo" tra due poligoni: uno all'interno e uno all'esterno. Più lati aggiungi al poligono (es. un esagono, poi un ottagono, fino a un poligono di 96 lati), più il perimetro dei poligoni si avvicinerà alla circonferenza del cerchio. Archimede arrivò a determinare che π era compreso tra 3+10/71 e 3+1/7 (circa 3,141)».

Osserviamo che i poligoni devono essere regolari e che il diametro della circonferenza deve essere 1 per ottenere come lunghezza della circonferenza proprio π. Questi sono dettagli trascurati da Gemini nella risposta data, ma che sono di fondamentale importanza. Il docente potrebbe rielaborare la risposta della chatbot e inquadrarla in un percorso didattico sui limiti (nelle ultime classi della secondaria di secondo grado), sulla costruzione e l'osservazione delle proprietà dei poligoni regolari inscritti e circoscritti a una circonferenza con un numero sempre maggiore di lati (nella secondaria di secondo grado, ma a seconda del dettaglio di indagine anche nel primo ciclo). Inoltre, non sarebbe male conoscere qualcosa di più sulla figura di Archimede come matematico.

La risposta di Gemini prosegue con altre affermazioni sulle serie numeriche, il metodo di Monte Carlo e le approssimazioni comuni per l'uso quotidiano. Ritorneremo su questo ultimo aspetto nel paragrafo 3.3.

3.2 La memoria

Ritornando a *Insegnamento dinamico*, Enriques insiste anche sulla memoria, come si legge direttamente dal testo:

> «Al concetto dinamico dell'insegnamento si affaccia da qualcuno un'obiezione che deve essere esaminata. Si dice: anche certe cose difficili, che non è dato comprendere coll'intelligenza in una tenera età, importa apprenderle, a ciò che restino nella memoria e si richiamino più tardi dalla mente più matura: *tantum discimus quantum memoriae mandamus*».

La memoria ha indubbiamente un valore importante nella visione storica perché consente di non dimenticare ciò che è stato e di imparare dagli errori commessi proiettando nuove speranze nel futuro. Citando in particolare Italo Calvino, la memoria «conta veramente – per gli individui, le collettività, le civiltà – solo se tiene insieme l'impronta del passato e il progetto del futuro, se permette di fare senza dimenticare ciò che si voleva fare, di diventare senza smettere di essere, di essere senza smettere di diventare» (Calvino, 1995).

Per secoli, la memoria è stata anche un segno di distinzione dell'essere umano perché era l'unico modo per disporre di grandi quantità di dati. Già con l'avvento della stampa, e ancora di più con l'introduzione dell'enciclopedia, la possibilità di archiviare grandi quantità di dati è certamente aumentata. Pensate che il supercomputer Leonardo, situato al Tecnopolo di Bologna, ha una potenza di calcolo ufficiale di 255 PetaFLOPS, 255 milioni di miliardi di operazioni al secondo!

È impensabile che gli esseri umani possano entrare in competizione con le macchine da questo punto di vista. D'altra parte, dispongono di una memoria cosiddetta di qualità perché seleziona le informazioni che il cervello conserva a lungo termine. Già Enriques iniziava a intravedere l'importanza di questo tipo di facoltà mnemonica, che viene chiamata memoria a lungo termine dalla psicologia cognitiva: per approfondimenti si rimanda a Catastini (2001). Usandola, sarebbe possibile costruire "una macchina calcolatrice", vale a dire uno strumento capace di utilizzare anche a grande distanza di

www.insegnareoline.com

tempo alcune conquiste 'memorabili', cioè tutte quelle nozioni e associazioni apprese e fissate nella mente attraverso un lavoro faticoso che punta alla comprensione profonda e che serve a cogliere il senso e il significato delle informazioni più che a raccoglierle senza verificarle e a diffonderle indistintamente. Mettere gli studenti nelle condizioni di compiere questo lavoro e arginare la loro pigrizia metacognitiva spetta senza dubbio al docente, ma su questo ritorneremo nell'ultimo paragrafo.

Parlando di una prima introduzione all'algebra e del delicato passaggio dai numeri alle lettere in quella che oggi viene chiamata la scuola secondaria di primo grado, Enriques scrive:

> «Volete che il giovane studente di matematiche acquisti di buon'ora il maneggio del calcolo algebrico, acciocché questo istrumento non gli manchi poi nella risoluzione dei problemi che gli saranno proposti? Consento che ciò sia utile insegnare il più presto possibile, in un'età in cui ancora non si saprebbe comprendere i più vari usi a cui la stessa algebra è chiamata: ma per raggiungere lo scopo dovete ancora far lavorare il ragazzo; bisogna spiegargli prima (con esemplificazioni che egli stesso dovrà variare a volontà) quale sia il significato delle "lettere" messe al posto di numeri, e poi fargli osservare le regole di combinazione, quasi come un giuoco, che – con una certa abilità – si riesce a rendergli discretamente interessante, e quindi accettabile. Solo quando il discepolo avrà appreso a ripetere queste combinazioni, in modo da riuscirvi senza più pensare, potremo dire che egli ha acquistato il maneggio del calcolo, fissandolo nella memoria: allora egli avrà costruito, per così dire, una macchina calcolatrice, che successivamente il suo pensiero potrà adoperare a diversi fini senza essere costretto ogni volta a ritornare sui motivi delle associazioni già fissate».

Un esempio semplice, ma significativo, dell'uso calibrato della memoria riguarda la risoluzione dell'equazione $x^2+2x+2=0$ sui numeri reali. Una memoria allenata riconosce subito che il primo membro è somma di due quantità positive cosicché l'equazione non ha soluzioni reali. Al contrario, Gemini risponde in prima battuta che la formula risolutiva non può essere applicata in questo caso perché il discriminante è negativo!

3.3 Teoria e pratica

In *Insegnamento dinamico*, teoria e pratica, che di solito sono contrapposte, manifestano di fatto una stretta interconnessione. Ciò viene ben espresso attraverso le parole stesse di Enriques riguardo la scuola.

> «Voglio dire che, se in un certo senso ogni scuola professionale è anche – in qualche grado e modo – formativa, per contro la scuola più eminentemente formativa deve sapersi valere delle applicazioni pratiche, per suscitare l'interesse dei discepoli meno sensibili alla bellezza della teoria astratta, ed anche per educare l'abito a riconoscere l'astratto nelle particolari esemplificazioni concrete, posto che la nostra scuola non debba servire agli abitanti dell'isola di Laputa!».

Non è difficile portare esempi per sostenere questa tesi anche oggi. Da un punto di vista culturale, uno fra i tanti riguarda l'esistenza di infiniti numeri primi, conseguenza della Proposizione 20 del Libro IX degli *Elementi* di Euclide. Apparentemente un'affermazione teorica inutile, si è rivelata di fondamentale importanza pratica in tempi recenti per il trasferimento di dati, ad esempio su Internet, data l'enorme difficoltà a trovare i fattori primi di numeri molto grandi. A loro volta, i problemi derivanti dalla scomposizione in numeri primi hanno dato impulso a nuove ricerche in teoria dei numeri. Questo esempio mostra inoltre quanto – ancora una volta – sia cruciale la visione dinamica della storia, perché soltanto in prospettiva, a oltre 2000 anni di distanza, è stato possibile, citando di nuovo Enriques, "sapersi valere delle applicazioni pratiche".

Un altro esempio, un autentico problema di realtà, consiste nel calcolo della lunghezza del raggio della Terra da parte di Eratostene di Cirene (276–194 a.C.). Questo esperimento mentale è raccontato in numerosi testi, ad esempio in Bini (2024), e si presta ad essere trattato – con sfumature diverse – sia in una scuola secondaria di primo grado sia in un primo biennio di una qualsiasi scuola secondaria di secondo grado.

www.insegnareonline.com

Nel primo caso, potrebbe fornire lo spunto per progettare percorsi didattici su alcuni temi fondanti come gli angoli, in modo da collegarli alla latitudine e alla longitudine, e come la circonferenza e la sfera, mettendoli in relazione al reticolo geografico e alla forma ideale della Terra.

Nel secondo caso, il metodo utilizzato per il calcolo potrebbe essere un punto di partenza per l'attivazione di alcuni processi, ad esempio, definire la longitudine e la latitudine a partire dagli angoli nel piano, nonché la sfera come luogo geometrico; stimare l'errore commesso rispetto al valore ufficiale del raggio della Terra; giustificare il ragionamento di Eratostene basato sulla Proposizione 29 del Libro I degli *Elementi* di Euclide, che parla di rette parallele tagliate da una trasversale e degli angoli formati da esse.

Questi processi consentono di approfondire taluni aspetti teorici di geometria euclidea, scelti a seconda del tipo di scuola. Inoltre, sia a livello di secondaria di primo grado che di secondo grado le scuole possono rivivere l'esperimento di Eratostene giocando sul sito http://eratosthenes.ea.gr/: vince chi riesce a stimare la lunghezza del raggio della Terra con il minimo errore possibile!

Un ulteriore esempio di stretta interdipendenza tra teoria e pratica viene raccontato in Di Tuoro et al. (2026), dove la professoressa Giovanna Guidone e gli alunni del Liceo Matematico (LM) "T. Calzecchi Onesti" di Fermo, sotto la guida dell'Università di Camerino, raccontano come hanno portato avanti un laboratorio di matematica per tutto il triennio del liceo. Il racconto si concentra sull'indagine fatta per stimare quanta energia è necessaria per mantenere la pista di pattinaggio in Piazza del Popolo a Fermo nel suo periodo di apertura. Emergono competenze trasversali di matematica (esponenziali e logaritmi) e fisica (la legge di Newton e la legge di Fourier) che hanno permesso agli alunni di rendere quantitativa la sensazione che alle nostre latitudini l'installazione di una pista di ghiaccio sia una manovra ecologicamente discutibile, sebbene abbia un impatto sociale sui giovani, come è stato spiegato dal Sindaco in persona dopo aver ascoltato il frutto dell'apprendimento attivo degli alunni.

Volendo entrare ancora di più nel merito della pratica didattica, il problem solving è uno strumento efficace per mettere in evidenza in aula il binomio teoria-pratica, specialmente se i problemi da risolvere richiedono di affrontare dei nodi teorici cruciali. Si possono trovare numerosi esempi nell'archivio delle prove INVALSI che fornisce un'ampia gamma di suggerimenti (rivolti a tutti i livelli scolari) e consente di passare in rassegna i principali temi affrontati in classe dal punto di vista della teoria e delle sue potenziali applicazioni. Per un esempio in cui invece si pone l'accento sui problemi di realtà (soprattutto nell'ambito del secondo ciclo di istruzione), si segnalano le attività del progetto nazionale "Matematica&Realtà", dedicato all'educazione alla modellizzazione matematica.

Infine, la GenAI può stimolare la curiosità nei confronti della "matematica quotidiana" (Bolondi, 2005) ricercando applicazioni di risultati matematici per avvicinare la scuola alla vita di tutti i giorni. Al prompt inserito su Google Gemini 3.0 "Mi fai un esempio di applicazione del teorema di Pitagora al mondo reale?" viene fornita in prima battuta questa risposta:

> «Certamente! Il Teorema di Pitagora non è solo un incubo per gli studenti di geometria, ma è uno degli strumenti più usati in architettura, navigazione e persino nella tecnologia che porti in tasca. […] 1. Mettere "in squadro" una parete (La regola del 3-4-5). Quando i muratori o i carpentieri devono costruire un angolo perfettamente retto (90°) per una stanza, utilizzano un'applicazione pratica del Teorema di Pitagora. Se le misure dei lati di un triangolo soddisfano l'equazione: $a^2+b^2=c^2$, allora il triangolo è rettangolo».

In realtà, questa affermazione non corrisponde al Teorema di Pitagora, ma all'inverso del Teorema di Pitagora, e potrebbe essere uno spunto per un percorso didattico nella secondaria di primo grado per iniziare a parlare della condizione di necessità o sufficienza di una affermazione avviando alla razionalità del discorso matematico proprio a partire da un testo generato dall'intelligenza artificiale generativa.

www.pensaremedia.com

> «[…] Altri esempi rapidi nel quotidiano: Dimensioni degli schermi: Quando compri un televisore da "50 pollici", quella misura non è né la larghezza né l'altezza, ma l'ipotenusa dello schermo. Se conosci la larghezza e l'altezza del tuo mobile, puoi usare Pitagora per capire se la TV ci starà. […]»

L'ultima frase della risposta merita un chiarimento con il prompt "Puoi approfondire l'esempio degli schermi?" Ecco la risposta.

> «Questa è l'applicazione più pratica. Spesso compriamo una TV conoscendo solo i pollici (la diagonale), ma dobbiamo capire se entra nel mobile del soggiorno (la larghezza). Per farlo, dobbiamo combinare Pitagora con il rapporto d'aspetto (Aspect Ratio), ovvero il rapporto tra base e altezza (es. 16:9)… (segue il calcolo relativo a un televisore di 50 pollici)».

3.4 Intuizione e logica

In *Insegnamento dinamico* troviamo anche un binomio diverso da quello di teoria e pratica, vale a dire quello di intuizione e logica.

> «Anche la domanda consueta, se le Matematiche debbono educare piuttosto l'intuizione o la logica, è viziata per una imperfetta visione del valore dell'insegnamento. Infatti il presupposto di codesta domanda è che logica ed intuizione si lascino separare come facoltà distinte dell'intelligenza, laddove esse sono piuttosto due aspetti inscindibili di un medesimo processo attivo, che si richiamano l'un l'altro».

Se l'intuizione può rendere l'apprendimento "veloce" grazie alla facoltà di "saper vedere" tramite la visualizzazione di figure, eventualmente mentali, o il riconoscimento di analogie fra concetti incontrati in ambiti diversi (de Finetti, 2015), la concatenazione logica lo rende "lento", non solo per il tempo necessario per soppesare ogni singola implicazione ma anche per valutare con rigore la correttezza delle intuizioni non giustificate.

Pur essendo contrapposte, intuizione e logica si sostengono paradossalmente a vicenda per un obiettivo comune, spesso fruttuoso, dando alla luce un flusso discontinuo di pensiero in cui si alternano processi fondamentali fra cui l'immaginare, l'ipotizzare, il congetturare, l'analizzare eventuali errori, il dimostrare (a meno che i problemi non siano indecidibili!), il verificare.

Nella storia della matematica, un esempio famoso – non certamente il solo – in cui questo binomio ha preso forma, addirittura umana, è dato dalla collaborazione tra G. H. Hardy (1877–1947) e S. Ramanujan (1887–1920): si veda, ad esempio, Mubeen (2023). Il primo era orgoglioso di mettere a punto le dimostrazioni perché era convinto che il ruolo del matematico consistesse nel far avanzare gradualmente le frontiere della conoscenza secondo un processo sequenziale, mentre la spiritualità del secondo influì sulla sua visione della matematica come impresa olistica disseminata di visioni e intuizioni subitanee. Sebbene fossero due matematici che pensavano in modo assai differente, uno più propenso alla logica, l'altro all'intuizione, e non condividevano un retroterra culturale comune, hanno deciso di mettersi in gioco e con una profittevole collaborazione hanno potenziato i propri talenti ottenendo risultati originali e significativi.

Questo binomio interviene anche nella scuola ai giorni nostri dove l'intuizione andrebbe coltivata dalla primaria alla secondaria di secondo grado e non bandita dall'aula, come spesso avviene. A seconda del livello scolare, va inoltre raffinata e collegata a corda doppia con il ragionamento e la logica che se ne possono avvalere qualora, ad esempio, vi sia la necessità di andare oltre meccanismi procedurali e schemi mentali consolidati.

Al fine di educare all'alternanza di intuizione e logica, occorrono problemi qualitativamente importanti che tengano conto di vari aspetti. Ad esempio, dovrebbero essere motivanti, complessi, difficili "quanto basta", significativi da un punto di vista dei contenuti disciplinari, utili per sviluppare processi cognitivi e non solo.

I corsi MathUp, organizzati da mateinitaly, e il sito "Problemi per matematici in erba", curato da Maria Dedò e da Sofia Sabatti, offrono numerosi esempi di problemi di questo tipo. In particolare, il sito si

www.lingegneronline.com

propone di mettere a disposizione dei docenti una raccolta di problemi commentati dal punto di vista dei contenuti e dei processi cognitivi che mettono in atto e rivolti in modo particolare ma non esaustivo agli alunni della scuola secondaria di primo grado.

Per esempio, il problema intitolato "Furbetti in coda" è stato proposto sia alle classi prime sia ad alunni delle classi seconde della scuola secondaria di primo grado e pone l'attenzione sul fatto che non ha senso parlare di numero consecutivo di un numero razionale rispetto all'ordinamento usuale mentre lo ha per un numero naturale. Osserviamo che è probabilmente più facile che un problema di questo tipo (soprattutto se risulta coinvolgente e stimola discussioni accanite fra i ragazzi) resti nella loro memoria a lungo termine, certo più di una definizione astratta più o meno formale! E questo può tornare utile più tardi, nel momento in cui potrebbero ritrovarsi a formalizzare il concetto di densità, non solo quella dell'insieme dei numeri razionali nell'insieme dei numeri reali. Una domanda non facile, ma sicuramente motivante, potrebbe essere indagare che cosa succede rispetto a un ordinamento dei numeri razionali diverso da quello usuale.

Come altro esempio di questo paragrafo, esaminiamo un problema interessante da molti punti di vista che può essere assegnato dalla primaria alla secondaria di secondo grado. Dopo avere segnato sulla circonferenza n punti e aver tracciato tutte le possibili corde che hanno estremi in questi punti, vorremmo determinare il numero di tali corde e il numero massimo delle regioni in cui risulta suddiviso il cerchio. Nella sperimentazione portata avanti nei corsi MathUp per classi prime della secondaria di primo grado, il problema offre un valido esempio del passaggio dai numeri alle lettere e dal contare al generalizzare. Inoltre, mette in evidenza come l'intuizione debba essere piuttosto raffinata.

Per iniziare, ha senso provare per piccoli valori di n e cercare di indovinare se esiste una formula generale per ogni n, un po' come nei quesiti in cui si conoscono i primi termini di una sequenza e si chiede di determinarne altri, a volte anche solo uno. Non è difficile convincersi che il numero delle corde è il coefficiente binomiale C(n,2). Facendo qualche tentativo per trovare il numero massimo delle regioni, si potrebbe pensare che la formula sia 2^{n-1}, perché coincide con i valori per 1, 2, 3, 4 punti. Al contrario, per 0 punti (anche 0 è infatti un numero!) c'è una sola regione e la formula non è più valida. Inoltre il numero massimo di regioni dipende dalla scelta dei punti al crescere di n e per 6 punti è 31 e non 32. Se volete approfondire, sul sito *The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences* (OEIS) potete trovare le proprietà della successione dei numeri delle regioni che si formano per qualsiasi numero di punti, precisamente la successione A000127, come viene indicata sul sito (si veda la Sitografia). A questo proposito, si rimanda anche al post pubblicato su Facebook da Luc Trouche il 7 gennaio (https://www.facebook.com/luctrouche).

4. Conclusioni

Se la visione di Enriques in *Insegnamento dinamico* appare quanto mai attuale, ci interroghiamo su quale sia il modo più indicato per metterla in pratica.

Come ricordato da Luciano e Tealdi (2012), l'interesse di Enriques per la scuola si esplica concretamente in vari modi, puntando in particolare (si veda anche Giacardi, 2019) sulla formazione degli insegnanti che, malgrado il passare del tempo, rimane ancora oggi, specialmente con tutte le novità tecnologiche e didattiche, un nodo cruciale per creare in classe un ambiente di apprendimento attivo, arricchito dagli spunti emersi nelle pagine precedenti.

A tal fine, uno strumento da valorizzare sempre più è il laboratorio di matematica come sintesi di contenuti disciplinari e metodologie didattiche che viene ampiamente descritto in Dedò e Di Sieno (2013). Oltre alla preparazione e alla regia dell'ambiente laboratoriale, che richiede non poco impegno ed esperienza, ci domandiamo quale formazione debba avere oggi il docente per esserne il perno.

Da un lato sarebbe necessario arginare gli effetti negativi dell'IA spronando gli studenti a non trasformarla, come dice il rapporto OCSE, in uno strumento cognitivo dall'effetto dopante o in una

www.dieregeometrie.com

scorciatoia per ottenere il risultato voluto. Per questo, si può ricordare loro di rileggere in modo critico gli output dei prompt e di cercare gli errori nei testi generati dalla GenAI, nonché di riscriverli o raccontarli al fine di migliorare la comprensione del testo e arricchire le proprietà di linguaggio. Si può anche sottolineare che il tempo macchina non è quello naturale, dato invece dall'alternanza non prevedibile tra pensieri lenti e pensieri veloci (Kahneman, 2011), e che le risposte non hanno tutte lo stesso stile e la stessa impostazione; anzi la loro diversità, come quella nei processi di apprendimento, è una ricchezza da coltivare poiché permette di includere tutti e di raggiungere insieme un livello più alto di quello raggiunto dal singolo.

Dall'altro lato, oggi più che mai, sarebbe di fondamentale importanza riportare il focus sull'intelligenza umana e le sue tante qualità per definire meglio i confini tra mezzi umani e mezzi cibernetici. A questo proposito, si può ricordare la dimensione ludica dell'apprendimento attraverso la lettura, i giochi matematici e non, la manipolazione di oggetti, l'uso della lezione dialogata, lo stupore per le conquiste memorabili, la capacità di vedere nessi, analogie, il raffinamento del binomio intuizione-logica, lo stimolo della curiosità come motore per formulare dubbi e porre domande: in fondo, come osservato da Prencipe e Sideri (2023), l'intelligenza artificiale non nasce nel 1956 con la domanda "Le macchine possono pensare?" del genio visionario Alan Turing?

In questo contesto, il docente potrebbe intervenire a più livelli per educare in maniera complementare l'intuizione e la logica degli studenti, la loro curiosità per il binomio teoria-pratica non escludendo l'ausilio dell'intelligenza artificiale che comunque non riuscirebbe ad assolvere completamente questi compiti.

Ricordando le parole di Enriques:

> «Qui mi assale il dubbio che la concezione della logica, supposta nei precedenti giudizii, non si accordi con quella del lettore; il quale, perciò, stenti a comprendere il valore dei miei argomenti. E pertanto mi occorre dichiarare che la logica comprende più aspetti che di solito non si abbiano in vista dagli insegnanti di matematiche. Vi è, se così è lecito esprimersi, una logica in piccolo ed una logica in grande: intendo l'analisi raffinata del processo del pensiero esatto (quasi la veduta microscopica degli elementi che formano il tessuto della scienza), e – per contro – lo studio delle connessioni organiche del sistema, cioè la veduta macroscopica della scienza. Ora io temo che, nelle preoccupazioni dei nostri educatori matematici, la logica in piccolo tenga troppo posto in confronto alla logica in grande!»,

l'insegnante non dovrebbe puntare solo alla "logica in piccolo" ma soprattutto alla "logica in grande" per infondere una visione d'insieme, unitaria della conoscenza.

Infine, citando ancora da *Insegnamento dinamico*:

> «Qui il pensiero vivo si svolge sul pensiero morto, da cui trae – per così dire – una regola economica di condotta. Ma il pensiero morto non fu travasato dalla testa del maestro a quella del suo ascoltatore; bensì dovette vivere a sua volta nella fatica dell'esercitazione!»,

il docente dovrebbe animare il più possibile il pensiero dei giovani riducendo il "pensiero morto" e alimentando sempre più il "pensiero vivo" favorendo attività in cui viene attivata la memoria a lungo termine e il consolidamento delle competenze apprese anziché la ripetizione mnemonica di fatti e di formule senza alcun beneficio cognitivo.

L'intelligenza artificiale potrebbe modificare anche il rapporto tra alunni e docenti facendo addirittura "scomparire" la classe come è stata intesa finora. Si potrebbe arrivare a ciò che I. Asimov descrive molto bene in un suo racconto del 1954 in cui si parla di una bambina, Margie, che va a scuola nel 2157:

> «Margie se ne andò in classe. L'aula era proprio accanto alla sua cameretta, e l'insegnante meccanico, già in funzione, la stava aspettando. Era in funzione sempre alla stessa ora, tutti i giorni tranne il sabato e la domenica, perché la mamma diceva che le bambine imparavano meglio se imparavano a orari regolari. Lo schermo era illuminato e stava dicendo – Oggi la lezione di

www.lisbonaeonline.com

> aritmetica è sull'addizione delle frazioni proprie. Prego inserire il compito di ieri nell'apposita fessura».

Questa classe futuristica viene invece contrapposta a quella dei nonni di Margie, che viene così descritta:

> «Margie stava pensando alle vecchie scuole che c'erano quando il nonno di suo nonno era bambino. Ci andavano i ragazzi di tutto il vicinato, ridevano e vociavano nel cortile, sedevano insieme in classe, tornavano a casa insieme alla fine della giornata. Imparavano le stesse cose, così potevano darsi una mano a fare i compiti e parlare di quello che avevano da studiare. E i maestri erano persone…»

Asimov conclude tramite i pensieri di Margie che il secondo modello scolastico è indubbiamente più divertente; tanto è vero che il titolo originale del racconto è *The Fun They Had*! E il divertimento non è affatto da sottovalutare nel processo di apprendimento. Infatti, uno stereotipo tipico riguardo la matematica consiste nel vederla come una materia fredda che produce ansia e che viene insegnata da docenti con scarsa empatia.

Per mettere in atto una formazione adeguata a vari livelli, è necessario intervenire non solo sui contenuti e sulle metodologie, ma anche su altri fronti. Innanzitutto, citiamo lo stesso Enriques, che scrive (Enriques, 1938, p. 188):

> «Più che le differenze dei metodi o le indicazioni dei programmi influisce sull'efficacia dell'insegnamento il valore degli insegnanti: la loro mentalità, la comunicativa, la passione che portano nelle cose insegnate, la larghezza degli interessi che li fa capaci di mettersi al posto degli allievi e di sentire con essi».

Per concludere, citiamo alcune righe tratte da un'intervista, che si può leggere, ad esempio, in Cemin (2023), a Paolo Lorenzi, docente di diversi ordini scolastici, formatore, ispettore e dirigente, che sul tema della formazione dice:

> «Ho sempre avuto il pallino dell'aggiornamento e della formazione, ossia la convinzione che questi siano strumenti indispensabili a docenti e dirigenti per riflettere collettivamente sulle pratiche quotidiane e introdurre nuove prassi, nuovi stili, nuovi modelli e pure nuovi schemi formativi».

Infine ricordiamo le ultime righe di Kra (2012) che, pur riferendosi alla situazione statunitense del 2012, solleva un altro problema di carattere generale, centrale nella formazione degli insegnanti:

> «[…] and always keep in mind that good teachers are the key. To put good math teachers in the classroom, society must expect more from them, must pay them more, and must give them the support and respect they deserve» (E ricordate sempre che i buoni insegnanti sono la chiave di svolta. Per avere buoni insegnanti di matematica in classe, la società deve aspettarsi di più da loro, deve pagarli di più e deve dare loro il sostegno e il rispetto che meritano).

In conclusione, sebbene sia passato più di un secolo e si siano succeduti incredibili cambiamenti tecnologici e sociali, *Insegnamento dinamico* ispira ancora chi crede in una scuola impegnata a sviluppare quei contenuti e quei metodi necessari per maturare un pensiero critico e autonomo con cui operare scelte consapevoli di fronte alla complessità della società odierna e all'incertezza di quella futura.

Ringraziamenti

L'autore esprime la propria gratitudine nei confronti di Maria Dedò e Simonetta Di Sieno per commenti e suggerimenti su una prima versione del testo. Ringrazia anche Anna Asti e Giovanna Guidone per alcune osservazioni sul testo. Inoltre, è grato di aver partecipato ad appuntamenti periodici di discussione e approfondimento sulla pratica didattica, in particolare "I venerdì di MathUp", webinar organizzato da Alessia Brunetta e Alessandra Gamba, e "Matematica è(v)viva", ciclo di incontri di formazione per insegnanti di matematica di ogni ordine e grado nell'ambito delle attività del C.I.D.I. di

www.insegnareonline.com

Palermo e di PalermoSCIENZA. Inoltre, l'autore ringrazia Antonella Coglitore e Vito Marino per spunti interessanti sull'insegnamento di altre discipline che ben si adattano anche alla matematica.

Bibliografia

Ballocco, L., et al. (2025). *La storia della matematica in classe*. mateinitaly (I quaderni di MathUp).

Bastani, H., Bastani, O., Sungu, A., Ge, H., Kabakcı, Ö., e Mariman, R. (2024). *Generative AI can harm learning* (The Wharton School Research Paper). SSRN. https://doi.org/10.2139/ssrn.4895486

Bini, G. (2023). Matematica dietro le quinte: navigazione e carte geografiche. In P. Cemin (a cura di), *Come i sentieri dell'acqua* (pp. 98–113). mateinitaly.

Bini, G. (2024). *Datemi una mappa e navigherò il mondo*. mateinitaly.

Bini, G. (2026). *Is dynamic teaching by Enriques still relevant today?* In preparazione.

Bolondi, G. (2005). *La matematica quotidiana*. Mimesis.

Bundy, A., Chater, N., e Muggleton, S. (2023). Introduction to "Cognitive artificial intelligence". *Philosophical Transactions of the Royal Society A*, *381*(2251), 20220051. https://doi.org/10.1098/rsta.2022.0051

Calvino, I. (1995). *Perché leggere i classici*. Mondadori.

Castelli Gattinara, E. (2017). Epistemologia dell'errore in Federigo Enriques e Gaston Bachelard. *Matematica, Cultura e Società*, serie I, *2*(2), 195–208.

Catastini, L. (2001). Neuroscienze, apprendimento e didattica della matematica. *Progetto Alice*, 6, 434.

Cemin, P. (a cura di). (2023). *Come i sentieri dell'acqua*. mateinitaly.

Clark, A. (2025). Extending minds with generative AI. *Nature Communications*, *16*, 4627.

de Finetti, B. (2015). Il "saper vedere" in matematica. *La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana*, *8*(3), 299–408.

Dedò, M., e Di Sieno, S. (2013). Laboratorio di matematica: una sintesi di contenuto e metodologie. *La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana*, serie I, *6*, 321–342.

Di Sieno, S., e Guerraggio, A. (2021). *Matematici in prima linea*. mateinitaly.

Di Tuoro, M., Guidone, G., Paci, A., Poletti, G., e Tiburzi, T. (2026). Indagine sul clima: il caso della pista di pattinaggio. *Archimede*, 4, 218–234.

Doshi, A. R., e Hauser, O. P. (2024). Generative AI enhances individual creativity but reduces the collective diversity of novel content. *Science Advances*, *10*(28). https://doi.org/10.1126/sciadv.adn5290

Enriques, F. (1921). Insegnamento dinamico. *Periodico di Matematiche*, serie IV, *1*(1), 6–16.

Enriques, F. (1938). *Le matematiche nella storia e nella cultura*. Zanichelli.

Enriques, F. (2003). *Insegnamento dinamico* (con scritti di F. Ghione e M. Moretti). Agorà Edizioni.

Floridi, L., Fresco, N., e Primiero, G. (2015). On malfunctioning software. *Synthese*, *192*, 1199–1220. https://doi.org/10.1007/s11229-014-0610-3

Fontana, A., e Toffalori, C. (2025). A colloquio con ChatGPT: IA e paradossi logici. *Nuova Lettera Matematica*, *9*, 80–97.

Giacardi, L. (2013). *La storia della matematica nell'insegnamento* [Diapositive del seminario, Università di Roma Tor Vergata, 19 giugno 2013]. http://crf.uniroma2.it/wp-content/uploads/2013/07/GIACARDI-StoriaInsegnamento.pdf

Giacardi, L. (2019). *Un insegnamento dinamico. Federigo Enriques e la formazione degli insegnanti* [Diapositive del seminario, Siena, 6 aprile 2019]. https://matematica.unibocconi.eu/sites/default/files/media/attach/Giacardi-Aprile%202019.pdf

Kahneman, D. (2011). *Thinking, fast and slow*. Farrar, Straus and Giroux (trad. it. *Pensieri lenti e veloci*, Mondadori, 2012).

Kommrusch, S., e Minsky, H. (2025). Society of LLMs: Constructivist learning approaches with multiple LLM instances. In P. Robertson e O. Georgeon (a cura di), *Situated self-guided learning. IWSSL 2024* (Lecture Notes in Computer Science, vol. 15457). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-031-96325-4_3

Kra, I. (2012). (Math) teachers are the key. *Notices of the American Mathematical Society*, *59*(4), 556–557.

www.insegnareonline.com

Luciano, E., e Tealdi, L. (2012). Federigo Enriques e l'impegno nella scuola. In *Conferenze e Seminari 2011–2012 dell'Associazione Subalpina Mathesis* (pp. 185–207). https://iris.unito.it/retrieve/handle/2318/124309/19186/Mathesis11-12_Luciano-Tealdi_185-207.pdf

Mubeen, J. (2023). *L'intelligenza matematica. Cosa abbiamo che le macchine non hanno*. Einaudi.

OECD (2026). *OECD Digital Education Outlook 2026: Exploring effective uses of generative AI in education*. OECD Publishing. https://doi.org/10.1787/062a7394-en

Paola, D. (2025). La voce di ChatGPT in classe. Opportunità didattiche e rischi. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, *48*(5), 451–472.

Prencipe, A., e Sideri, M. (2023). *Il visconte cibernetico*. Luiss University Press.

Vailati, G. (1897). *Sull'importanza delle ricerche relative alla storia delle scienze* (prolusione a un corso sulla storia della meccanica, letta il 4 dicembre 1896 nell'Università di Torino). Roux e Frassati.

Sitografia

Donne nella Scienza (progetto a cura di S. Gambarini): https://www.youtube.com/playlist?list=PL7_iPte-Vs1xcMXmRpQnz_KMb_aqCPaA-

Eratosthenes Experiment: http://eratosthenes.ea.gr/

Federigo Enriques. Edizione nazionale delle opere: https://www.federigoenriques.org/

GestInv 3.0. Archivio interattivo delle prove INVALSI: https://www.gestinv.it/Index.aspx

INVALSI: https://www.invalsi.it/invalsi/index.php

Le donne fanno scienza (progetto CASIO-MIM): https://www.casio-edu.it/le-donne-fanno-scienza/

mateinitaly, per la comunicazione scientifica: https://www.mateinitaly.it/

Matematica&Realtà: https://www.matematicaerealta.cloud/

MathNews. Gruppo di discussione sull'insegnamento della matematica e sul software matematico: http://dm.unife.it/mathnews/

MathUp. Corsi di formazione e aggiornamento per gli insegnanti di matematica di ogni ordine di scuola: https://mathup.it/

Prisma magazine: https://www.prismamagazine.it/

Problemi per matematici in erba: https://www.problemi.xyz/

Sloane, N. J. A. (a cura di). The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences (OEIS): https://oeis.org/

www.insegnareonline.com

2. Pensare vs/imitare: nuove forme di interazione in classe con l'intelligenza artificiale[3*]

Luigi Menna[4]

Abstract

Il presente contributo propone una rielaborazione dell'intervento tenuto da Ferdinando Arzarello il 10 marzo 2026 nell'ambito del ciclo di formazione "Matematica è(v)viva 3", rivista e approvata dallo stesso Arzarello. Muovendo da una scena di interazione fra uno studente e un chatbot, ci si chiede se in classe, con l'intelligenza artificiale generativa, si pensi o si imiti. Dopo aver richiamato la natura multimodale dell'attività matematica e i cambiamenti recenti della disciplina, si descrive un esperimento didattico sul teorema di Varignon, in cui GeoGebra e ChatGPT, orchestrati dall'insegnante, sostengono il passaggio dall'evidenza empirica alla dimostrazione. L'esperimento è letto con gli strumenti della commognition di Sfard e porta a ipotizzare una "nuova genesi strumentale", in cui si può anche "imitare per pensare".

1. Una scena iniziale: ChatGPT e il problema di statistica

Si immagini uno studente dei primi anni di università alle prese con un problema di statistica: la media di un esame è 50, con deviazione standard 12; si estraggono a caso 36 studenti e si chiede la probabilità che la media campionaria sia maggiore di 52. È un esercizio standard, comprensibile anche a chi non padroneggia in profondità la statistica.

ChatGPT imposta la situazione come problema di distribuzione campionaria della media e spiega che bisogna calcolare l'errore standard, dividendo la deviazione standard per la radice quadrata della numerosità del campione. Chiede allo studente se ricorda la formula, lo invita a fare il passo da solo e lo aspetta; vedendo che non sa, gli "facilita" il compito suggerendo la formula e chiedendo di sostituire i dati: $12/\sqrt{36} = 2$. Prosegue quindi conducendolo, passo dopo passo, verso il calcolo della probabilità cercata.

La domanda che Arzarello pone a partire da questa scena è decisiva: in un'interazione del genere lo studente sta davvero pensando? Sta soltanto imitando? Oppure sta facendo qualcosa a metà tra pensiero e imitazione? L'interrogativo è sempre presente nell'insegnamento, ma emerge in modo particolarmente acuto quando entrano in gioco i chatbot di intelligenza artificiale.

Per metterlo a fuoco, Arzarello richiama un testo di Alan Schoenfeld dei primi anni Novanta (Schoenfeld, 1992). A scuola, osservava Schoenfeld, gli insegnanti forniscono spesso regole per risolvere i problemi, che gli studenti memorizzano e applicano senza attribuire loro alcun senso: se si segue la procedura si ottiene la risposta giusta e tutti sono contenti. A lungo termine, però, gli allievi imparano che la matematica scolastica è arbitraria, che i "problemi di vita reale" non hanno nulla di reale e che non è necessario capire la situazione per risolverla. Accostato all'esempio con ChatGPT, il quadro suggerisce un contrasto forte: stiamo costruendo situazioni in cui si pensa o situazioni in cui si imita, e quale ruolo dovrebbe avere in esse l'intelligenza artificiale?

2. Processi multimodali in classe: discorsi, segni, artefatti

Per affrontare queste domande Arzarello richiama alcune linee di ricerca sviluppate negli ultimi decenni. Lo studio delle classi di matematica ha mostrato che l'attività di insegnamento e

3* Contributo basato sulla conferenza tenuta da Ferdinando Arzarello (Università degli Studi di Torino) il 10 marzo 2026 nell'ambito del ciclo di incontri "Matematica è(v)viva 3", promosso dal C.I.D.I. di Palermo e da PalermoSCIENZA. Il testo è stato rivisto e approvato dal professor Arzarello.

4 LUMSA – Libera Università Maria SS. Assunta, sede di Palermo; C.I.D.I. Palermo.

www.insegnareonline.com

apprendimento è intrinsecamente multimodale: accanto alle parole orali e scritte coesistono e si intrecciano iscrizioni (disegni, schizzi, grafici, formule), gesti, sguardi e altre modalità extralinguistiche, e artefatti di vario tipo, dalla matita agli ambienti dinamici fino ai dispositivi tecnologici più sofisticati. Tutte queste risorse sono insieme strumenti di pensiero e di comunicazione fra studenti e insegnanti, e il loro intreccio costituisce l'ambiente in cui a scuola si "fa" matematica. Arzarello usa il termine ampio "segni" per indicare congiuntamente iscrizioni, gesti e altri mezzi di rappresentazione.

Questa prospettiva si appoggia su una vasta tradizione teorica: Vygotskij, Frege, Peirce, Saussure e Wittgenstein per il ruolo del linguaggio e dei segni; gli studi sul discorso matematico in classe di autori come Sfard, Radford e Bartolini Bussi; la tradizione sugli artefatti e sulle macchine matematiche, da Descartes a Papert (la tartaruga LOGO) fino a Rabardel e alla teoria della genesi strumentale (Rabardel, 1995). L'apprendimento della matematica non è allora una mera trasmissione di contenuti, ma un intreccio culturale, cognitivo e fisico di discorsi, segni e artefatti, mediato dalle azioni di insegnanti e studenti, ed è dentro questo intreccio che vanno collocati i nuovi strumenti di intelligenza artificiale.

3. Cambiamenti nella matematica e nel suo insegnamento

Negli ultimi decenni la matematica stessa ha attraversato trasformazioni profonde: si è ridotta la distanza tradizionale fra matematica pura e applicata, è cresciuta la complessità dei risultati e si è diffuso l'uso professionale di dimostratori automatici e interattivi di teoremi. Alcuni risultati importanti sono stati dimostrati interamente da sistemi automatici, altri grazie a sistemi interattivi in cui il ricercatore collabora con il dimostratore. Ciò ha conseguenze epistemologiche e fondazionali, perché obbliga a ripensare che cosa intendiamo per dimostrazione, per rigore e per "vedere" che un teorema è vero. Tali trasformazioni incidono direttamente sull'insegnamento: gli approcci tradizionali entrano in crisi in un contesto socio-economico e politico in rapido mutamento.

In parallelo si è affermata l'idea di pensiero computazionale, inteso, in linea con Wing (2006), come l'insieme dei processi di pensiero coinvolti nella formulazione e nella soluzione di problemi le cui soluzioni possono essere eseguite in modo efficace da un agente di elaborazione dell'informazione. La nozione è richiamata, talvolta in forme semplificate, in molte politiche educative e documenti ministeriali insieme alle competenze digitali. Fadel ha parlato di "tempesta perfetta dell'apprendimento", generata dalla convergenza di strumenti digitali del pensiero, stili di vita digitali, lavoro basato sulla conoscenza e ricerca sull'apprendimento: l'educazione matematica si trova così al centro di una rete fitta che connette scuola, tecnologie e società.

4. L'intelligenza artificiale entra in classe

A questo quadro si aggiunge, negli ultimissimi anni, l'irruzione dell'intelligenza artificiale generativa: chatbot come ChatGPT diventano rapidamente "assistenti per studiare", come titolava un articolo del *Sole 24 Ore*, e gli studenti li usano per affrontare compiti difficili, preparare esami ed esplorare nuovi concetti. La ricerca internazionale comincia a proporre un approccio "ibrido", che integra la flessibilità delle risposte dell'IA generativa con la rigorosa convalida dell'IA simbolica (dimostratori automatici, sistemi di calcolo simbolico, ambienti come GeoGebra), il tutto intrecciato con l'interazione umana.

Richard (Richard e Van Vaerenbergh, in corso di stampa) sottolinea che l'interazione uomo-macchina produce in questo contesto nuove forme di attività matematica: un'interazione dinamica fra rappresentazioni, calcoli e ragionamenti automatizzati, congetture esplorative con feedback immediati, un impatto cognitivo delle interazioni fra artefatti diversi. Avverte però che questo potenziale esiste solo se l'interazione non viene ridotta a un uso puramente tecnico, come se lo strumento fosse una semplice calcolatrice sofisticata.

L'IA generativa modifica anche il classico triangolo didattico (studente, insegnante, sapere matematico). Con l'informatica educativa, grazie alla teoria della genesi strumentale, si era già passati a un "tetraedro" che includeva esplicitamente la tecnologia. Ora, però, ChatGPT non è più

www.insegnareonline.com

semplicemente "la macchina" con cui eravamo abituati a interagire, come un software di geometria dinamica: è un soggetto non umano capace di generare testo, argomentazioni e spiegazioni. La rete delle relazioni in classe si complica e impone di ripensare l'integrazione fra IA simbolica, IA generativa e attività umana di insegnanti e studenti. Entrambi i tipi di IA possono favorire l'esplorazione e la validazione matematica, ma al momento non possono sostituire un ragionamento matematico completo e consapevole: l'educazione deve progettare modalità d'uso che ne sfruttino i punti di forza, senza rinunciare al ruolo centrale del pensiero umano.

5. ChatGPT come "voce aliena"

Per chiarire questa posizione Arzarello propone un'immagine: ChatGPT è "intelligente" in un senso diverso da quello umano. Le sue risposte non si fondano, in generale, su una teoria formale come avviene in un sistema di dimostrazione automatica, ma su indagini statistiche condotte su grandi basi di testi, immagini e dati. È una "voce aliena", estremamente performante ma soggetta a errori caratteristici, le allucinazioni, cioè collegamenti statisticamente plausibili ma matematicamente scorretti. Se individuati, questi errori possono diventare occasioni preziose: suggeriscono piste euristiche, spingono a verificare, a cercare controesempi, a precisare definizioni.

Se è vero, più in generale, che i feedback delle macchine possono cambiare il valore epistemico di ciò che chiamiamo "conoscenza", essi rappresentano anche una leva per rilanciare domande di tipo scientifico. L'uso dell'IA può spingere gli studenti a problematizzare, a generalizzare, a interrogare la "voce aliena" come una realtà indipendente da loro, a cui devono rivolgere domande sensate e controllabili. Da qui la proposta di progettare attività, in particolare sull'argomentazione e sulla dimostrazione, che integrino IA generativa, IA simbolica e discorso matematico umano.

6. L'esperimento didattico sul teorema di Varignon

Arzarello presenta un esperimento pilota realizzato da un gruppo di ricercatori e insegnanti di varie città italiane, da Bolzano a Enna, auto-battezzatisi "gli sbilenchi". L'esperimento si svolge in una seconda classe di scuola secondaria di secondo grado e ha al centro il teorema di Varignon: dato un quadrilatero ABCD qualsiasi, il quadrilatero MNPQ i cui vertici sono i punti medi dei lati è sempre un parallelogramma. Gli studenti non conoscevano il teorema in anticipo.

Il percorso si articola in sette fasi. Nella prima, con carta e matita, gli studenti costruiscono quadrilateri e i loro punti medi e formulano congetture sul quadrilatero interno. Nella seconda la costruzione diventa dinamica con GeoGebra: il trascinamento fa emergere congetture più generali, come «sembra che MNPQ sia sempre un parallelogramma». Nella terza, gli allievi scrivono le osservazioni su un Padlet comune e le discutono in gruppo e in plenaria. Nella quarta intervengono "esperti", ricercatori e docenti, che discutono con la classe che cosa significhi dimostrare in geometria e introducono in modo accessibile il tema dell'IA e dei diversi strumenti. Nella quinta gli studenti chiedono a ChatGPT di spiegare perché le loro congetture siano (o non siano) vere e se le spiegazioni ottenute siano vere dimostrazioni. Nella sesta, a casa, esplorano con l'aiuto di ChatGPT casi varianti (quadrilateri concavi, intrecciati) e chiedono all'IA se la proprietà si mantiene. Nella settima, in discussioni successive e in un incontro finale, si lavora su testi e soluzioni, si confrontano risposte dell'IA e ragionamenti umani e si riflette sul senso di "sapere perché".

Il setting permette di osservare che cosa accade quando strumenti diversi (carta, GeoGebra, libro, IA generativa) sono orchestrati dall'insegnante per spingere gli studenti oltre la semplice constatazione empirica.

7. Il caso di Micol: dal "ciò che vedo è vero" al salto epistemico

Per illustrare la dinamica, Arzarello segue il percorso di una studentessa, Micol, e del suo piccolo gruppo. Micol ha fragilità nelle conoscenze di base, fatica a formulare domande e a problematizzare le

www.insegnareonline.com

situazioni e preferisce applicare direttamente formule note. All'inizio il gruppo parte da quadrilateri molto particolari (quadrati, rettangoli), come se esaurissero il concetto di "quadrilatero". GeoGebra allarga rapidamente l'orizzonte: trascinando i vertici, le ragazze vedono che, anche con forme molto distorte e senza angoli retti, il quadrilatero dei punti medi continua a "sembrare" un parallelogramma. La reazione spontanea è: «È dimostrato, lo vediamo con GeoGebra». Lo strumento gode di una forte autorità epistemica: ciò che appare sullo schermo è assunto come vero senza percepire il bisogno di giustificazioni teoriche.

Quando viene chiesto esplicitamente di dimostrare, emergono le lacune. Il gruppo chiede aiuto soprattutto ai compagni e ai libri di testo, anche di anni precedenti, meno all'insegnante, a cui rivolge soprattutto domande tecniche su GeoGebra. Anche dopo aver capito che per dimostrare il parallelismo occorre considerare uguaglianze di angoli o di vettori, continua ad affidarsi alle misure del software: «sembrano uguali, quindi sono uguali».

L'introduzione di ChatGPT cambia sensibilmente il quadro. In un primo momento Micol e le compagne "traducono" la consegna in una richiesta all'IA: «Descrivi le caratteristiche del quadrilatero e spiega perché le possiede». Una studentessa legge la risposta, un'altra costruisce la figura in GeoGebra, una terza controlla: lo strumento dinamico diventa un'estensione dell'IA per verificarne le affermazioni. Col procedere del lavoro la domanda nel prompt cambia natura: dal generico «quali sono le caratteristiche?» si passa a «perché queste caratteristiche sono vere?» e infine a «dimostra che il quadrilatero possiede un centro di simmetria». Arzarello interpreta la trasformazione come un "salto epistemico": Micol non si accontenta più di vedere che "sembra un parallelogramma", ma cerca ragioni generali, condizioni sufficienti e strutture, come il centro di simmetria, che garantiscono la proprietà.

GeoGebra e ChatGPT, usati insieme, sostengono questo passaggio in modi diversi. GeoGebra contribuisce a generare congetture e a costruire controesempi, e le negazioni supportate da controesempi hanno un peso epistemico più forte delle semplici affermazioni visuali. ChatGPT, interrogato criticamente, stimola la ricerca di argomentazioni, costringe a precisare che cosa si vuole dimostrare, offre spiegazioni da verificare e talvolta spunti fallaci da smontare. La credenza iniziale "è vero ciò che vedo" evolve così verso una consapevolezza più matura della differenza fra evidenza empirica e dimostrazione.

8. Una chiave teorica: la *commognition* di Anna Sfard

Per interpretare questa evoluzione Arzarello richiama il quadro di Anna Sfard (2008) e il concetto di *commognition*, crasi di *communication* e *cognition*, che concepisce il pensiero matematico come forma di discorso. Nel suo approccio partecipazionista la matematica è un'attività discorsiva: si partecipa a pratiche discorsive, si imparano certi termini, certe strutture argomentative, certi modi di narrare gli oggetti matematici. Pensiero e linguaggio non sono separati: riprendendo Vygotskij e Wittgenstein, Sfard sostiene che pensare coincide con l'uso competente di un certo tipo di discorso.

I dialoghi di Micol con le compagne, con GeoGebra e con ChatGPT sono esempi di discorso matematico in evoluzione. Sfard descrive operazioni discorsive come l'*encapsulating*, il *refining* e l'*alienation*, quest'ultima intesa in senso tecnico e non psicologico. L'alienazione si verifica quando un costrutto discorsivo, ad esempio la "dimostrazione del teorema di Varignon", è trattato come un oggetto indipendente dal contesto originario: se ne parla in modo impersonale, lo si usa per generare nuove narrazioni, si confrontano dimostrazioni diverse di "uno stesso" teorema. Nel percorso di Micol si osserva gradualmente il passaggio da descrizioni situate («in questo disegno vedo che è un parallelogramma») a discorsi decontestualizzati («in ogni quadrilatero, congiungendo i punti medi, si ottiene un parallelogramma perché…»). Le interazioni con ChatGPT e GeoGebra fungono da catalizzatori, a condizione di essere inserite in un ambiente discorsivo guidato dall'insegnante.

www.insegnareonline.com

9. Verso una "nuova genesi strumentale"

Nella letteratura didattica la genesi strumentale descrive come un artefatto, ad esempio un software di geometria dinamica, diventi attraverso l'uso guidato uno strumento per pensare: non più un oggetto esterno, ma parte dell'organizzazione del lavoro matematico di studenti e insegnanti (Rabardel, 1995). Per la sperimentazione descritta Arzarello propone l'idea di una "nuova genesi strumentale", più complessa. L'interazione non avviene più soltanto fra studente, insegnante, sapere e tecnologia (il tetraedro di Brousseau e Rabardel), ma coinvolge simultaneamente GeoGebra, il libro di testo, i compagni, l'insegnante e ChatGPT come IA generativa.

Questi elementi operano su due piani epistemici intrecciati: quello dell'evidenza dinamica e dei controesempi (GeoGebra) e quello delle spiegazioni discorsive, talvolta fallaci, dell'IA generativa. La dinamica complessiva è più simile a una rete che a un solido geometrico statico. L'obiettivo non è affidare alle macchine il compito di "pensare al posto nostro", ma costruire ambienti di apprendimento in cui gli strumenti digitali aiutino gli studenti a formulare congetture, cercare controesempi, chiedere e produrre giustificazioni e distinguere tra il vedere che qualcosa sembra vero e il sapere perché è vero.[5]

10. Conclusione: "imitare per pensare" e il lettore in fabula

Tornando al punto di partenza, Arzarello rilegge il contrasto fra "pensare" e "imitare" in modo meno dicotomico. Da un lato l'approccio criticato da Schoenfeld, con regole da memorizzare senza senso, resta un pericolo reale, specialmente se l'IA viene usata per fornire sequenze di passi da seguire meccanicamente. Dall'altro l'esperimento su Micol mostra che si può anche "imitare per pensare": l'interazione con ChatGPT e con gli altri strumenti sollecita l'allieva a riformulare, interrogare e verificare, fino a costruire un proprio discorso dimostrativo.

Per esprimere questa idea Arzarello evoca *Lector in fabula* di Umberto Eco (1979): il lettore non è un ricevitore passivo, ma co-costruisce il senso del testo. Analogamente lo studente che dialoga con ChatGPT, in un ambiente didattico adeguato, diventa "lettore in fabula matematica": attribuisce significato alle risposte, le accetta o le rifiuta, le integra con ciò che vede e sa, crea significato nuovo. La creatività è attribuita non solo all'autore, umano o macchina, ma soprattutto alla ricezione: è creativo ciò che, per chi ne fruisce, apre possibilità inedite di comprensione. Quando si interagisce con ChatGPT, la sfida non è stabilire se "pensi" come un umano, ma progettare situazioni in cui la sua "voce aliena" diventi occasione per far pensare gli studenti in modo più profondo, critico e consapevole.

Bibliografia

Eco, U. (1979). *Lector in fabula*. Bompiani.

Rabardel, P. (1995). *Les hommes et les technologies: approche cognitive des instruments contemporains*. Armand Colin.

Richard, P. R., & Van Vaerenbergh, S. (à paraître). Artificial intelligence and the new mathematical work. In J. Engelbrecht & B. Pepin (Eds.), Generative artificial intelligence in the changing mathematics classroom. Springer.

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. In D. A. Grouws (a cura di), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 334–370). Macmillan.

Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating: Human development, the growth of discourses, and mathematizing*. Cambridge University Press.

5 Nota aggiunta dopo la conferenza: L. Trouche sta ultimamente sviluppando le sue ricerche in questa direzione: si veda https://www.academia.edu/175808066/Extending_Instrumental_Orchestration_for_AI_Mediated_Mathematics_Classrooms_The_AISIO_Framework'

Wing, J. M. (2006). Computational thinking. *Communications of the ACM*, *49*(3), 33–35.

Sitografia

Trouche, L. (s.d.). *Extending instrumental orchestration for AI-mediated mathematics classrooms: The AISIO framework*: https://www.academia.edu/175808066/Extending_Instrumental_Orchestration_for_AI_Mediated_Mathematics_Classrooms_The_AISIO_Framework

www.insegnareonline.com

3. Matematica e problemi: tradurre, rappresentare, risolvere[6*]

Luigi Menna[7]

Abstract

Il presente contributo propone una rielaborazione critica dell'intervento tenuto da Bruno D'Amore, membro dell'Accademia delle Scienze di Bologna, il 1° aprile nell'ambito del ciclo di formazione "Matematica è(v)viva 3", dedicato al ruolo dei problemi matematici nei processi di insegnamento e apprendimento. Muovendo dalla distinzione fra problema ed esercizio, l'intervento di D'Amore ha attraversato una serie di esempi tratti dalla ricerca didattica per mostrare come la comprensione di un problema passi attraverso un lavoro di traduzione fra registri semiotici diversi, un lavoro che gli insegnanti dovrebbero saper riconoscere, accompagnare e valorizzare invece di irrigidire in procedure standardizzate. Nelle pagine che seguono si ripercorrono i nuclei concettuali dell'intervento, integrandoli con alcuni riferimenti bibliografici utili a inquadrarli nella letteratura di ricerca in didattica della matematica.

1. Introduzione: il contesto dell'intervento

Nell'ambito del ciclo di incontri di formazione "Matematica è(v)viva 3", rivolto a insegnanti di ogni ordine e grado, Bruno D'Amore ha tenuto un intervento dedicato al tema "Matematica e problemi", concentrando la riflessione sul ruolo dei problemi matematici nei processi di insegnamento e apprendimento, sia dal punto di vista della comprensione dei testi sia da quello della risoluzione. Forte di un'esperienza pluridecennale nella ricerca in didattica della matematica, D'Amore non ha proposto una rassegna esaustiva della letteratura sul tema, ma ha costruito un discorso teorico attraverso una sequenza di esempi tratti dalla pratica scolastica, capaci di illustrare in modo concreto le tesi via via avanzate.

Nel presente contributo si ripercorrono i passaggi principali di quell'intervento, cercando di restituirne l'impianto argomentativo e, dove utile, di ricondurlo esplicitamente ai riferimenti teorici della ricerca didattica a cui D'Amore stesso ha fatto riferimento nel corso dell'esposizione.

2. Le radici storiche della ricerca didattica in Italia

D'Amore ha aperto il proprio intervento collegando la riflessione sui problemi alla stagione dei "nuovi programmi" della scuola elementare del 1985, sottolineando come in quei documenti fossero già presenti tracce di un'attenzione specifica per l'apprendimento matematico e per la progressione degli apprendimenti nel tempo. Ha richiamato, ad esempio, la presenza di termini oggi desueti come "fanciullo", che all'epoca furono oggetto di discussione, così come l'idea di una "progressiva organizzazione" degli apprendimenti e della necessità di accertare ciò che l'alunno ha già costruito. Secondo D'Amore, in queste formulazioni si possono scorgere gli embrioni di quella che sarebbe diventata, negli anni successivi, la ricerca in educazione matematica in Italia – un campo di studi che lo stesso D'Amore ha contribuito in modo determinante a fondare e sviluppare.

3. Problema ed esercizio: una distinzione cruciale

Un nucleo centrale dell'intervento riguarda la distinzione tra problema ed esercizio, e la critica alla riduzione del primo a semplice applicazione di un'operazione nota. D'Amore ha riferito di aver riscontrato, in diversi libri di testo, sezioni intitolate "Problemi" suddivise in "problemi di addizione", "problemi di sottrazione" e così via, nelle quali le proposte sono in realtà soltanto esercizi a operazione

6* Contributo elaborato a partire dall'intervento di Bruno D'Amore, tenuto il 1° aprile 2026 a Palermo nell'ambito del ciclo di incontri "Matematica è(v)viva 3".

7 LUMSA – Libera Università Maria SS. Assunta, sede di Palermo; C.I.D.I. Palermo.

www.insegnareonline.com

indicata, che non richiedono alcuna scelta né alcuna autentica ricerca da parte dell'allievo. Questa pratica, secondo D'Amore, annulla la funzione formativa del problema, che dovrebbe invece mettere in gioco strategie personali, decisioni, tentativi e controlli, costruendo un vero e proprio atteggiamento risolutivo piuttosto che una mera tecnica di esecuzione.

Su questo punto, D'Amore ha insistito sul valore delle strategie ingenue dei bambini: soprattutto nella scuola primaria, e perfino nella scuola dell'infanzia, i più piccoli possiedono una notevole disponibilità a ricorrere a strategie personali per affrontare situazioni problematiche. Da qui l'invito, rivolto in particolare agli insegnanti della scuola secondaria, a osservare direttamente i bambini piccoli al lavoro sui problemi: da queste osservazioni si possono comprendere meglio le difficoltà successive degli studenti più grandi e le radici di certi ostacoli cognitivi. La didattica, per D'Amore, dovrebbe valorizzare tali strategie spontanee, evitando di soffocarle tramite la precoce imposizione di algoritmi standardizzati o presunte "regole" per risolvere i problemi, che in realtà non esistono in forma univoca.

4. Concretezza relativa e motivazione

Un secondo momento dell'intervento ha riguardato un luogo comune diffuso nella pratica didattica, secondo cui i problemi, per essere comprensibili, dovrebbero sempre essere concreti e ancorati all'esperienza quotidiana del bambino. D'Amore ha problematizzato questa convinzione, facendo notare come, specialmente verso i sei anni, il bambino disponga di una potentissima capacità di costruzione fantastica della realtà, e come situazioni tratte da mondi immaginari possano risultare altrettanto, se non più, significative di quelle tratte dal vissuto quotidiano. Ha proposto dunque di parlare di "concretezza relativa" all'età e al livello scolastico, una nozione che include anche contesti di finzione coerenti con l'immaginario dei bambini, purché motivanti e cognitivamente accessibili.

In questa cornice, D'Amore ha osservato come i bambini portino con sé una vasta esperienza di risoluzione di problemi derivante dai giochi e dalle interazioni con i pari, un'esperienza che raramente viene riconosciuta come matematica da adulti e insegnanti. La matematica implicita nelle situazioni di gioco – nelle strategie per vincere, nella gestione di risorse o di mosse – rimane nascosta perché non si presenta con un linguaggio formalmente matematico: un compito dell'insegnante consiste allora nel valorizzare e rendere consapevole questa matematica diffusa, nominando le strutture in gioco e collegandole ai contenuti scolastici.

5. Tradurre la realtà in linguaggio matematico: la prospettiva semiotica

Il cuore teorico dell'intervento risiede nella descrizione del primo grande compito dell'allievo come un lavoro di traduzione: occorre passare dai linguaggi con cui la realtà si presenta – parole, immagini, fotografie, grafici, situazioni di gioco – a un linguaggio matematico adeguato all'età e al problema. Come ha precisato D'Amore, tale linguaggio non coincide necessariamente con simbolismi formali complessi: per un bambino piccolo può trattarsi, ad esempio, di confronti del tipo "un quadrato più grande di un altro" oppure di rappresentazioni numeriche semplici. Il punto cruciale, nella lettura proposta da D'Amore, è che la traduzione richiede una scelta tra possibili rappresentazioni, e che questa scelta ha una forte componente personale e stilistica.

L'intervento assume esplicitamente una prospettiva semiotica: la matematica viene descritta come linguaggio, o meglio come insieme di linguaggi e rappresentazioni, verbali e non verbali. D'Amore ha richiamato la distinzione tra registri semiotici, sottolineando come, tra adulti e tra docenti, sia spesso più opportuno parlare di "rappresentazioni matematiche" piuttosto che di linguaggio in senso stretto, proprio per mettere in risalto la pluralità di forme – simboliche, grafiche, figurative – che tali rappresentazioni possono assumere. Tradurre un problema significa allora passare da un registro semiotico quotidiano o iconico a una rappresentazione matematica che permetta di operare, ragionare e, infine, calcolare.

www.insegnareonline.com

Una tesi forte, più volte ribadita nell'intervento, è che lo studente debba sentirsi libero e tranquillo nella scelta del modo con cui tradurre un testo di problema in rappresentazioni matematiche. L'insegnante, secondo D'Amore, dovrebbe evitare di imporre precocemente un unico registro o una forma standard di rappresentazione, offrendo invece occasioni per discutere e confrontare le diverse scelte degli studenti: in questo confronto emergono non solo stili personali, ma anche criteri di efficacia e di economia didattica, ossia il fatto che alcune rappresentazioni risultano più vantaggiose di altre per comprendere e risolvere un determinato problema.

Questa impostazione trova un riferimento diretto nei lavori di Raymond Duval sulla semiotica in didattica della matematica, esplicitamente richiamati da D'Amore nel corso dell'intervento. Duval distingue tre aspetti fondamentali nell'uso dei registri semiotici: la scelta dei tratti caratteristici da rappresentare, il trattamento – la trasformazione di una rappresentazione in un'altra all'interno dello stesso registro semiotico – e la conversione, ossia il passaggio da un registro semiotico a un altro (Duval, 1993, 1995). Come ha osservato D'Amore, la conversione tra registri, ad esempio tra un'espressione algebrica e una figura geometrica, è particolarmente delicata e spesso all'origine delle difficoltà di apprendimento, già dalla scuola primaria ma in modo eclatante nella secondaria.

6. Esempi dalla pratica scolastica: le traduzioni dei bambini

Per illustrare la ricchezza delle traduzioni possibili, D'Amore ha presentato il classico problema delle uova di Pierino ("Pierino va al mercato e compra 10 uova, ma tornando a casa ne rompe 3. Quante uova consegnerà alla mamma?"). Se alla scuola secondaria di primo grado questo problema viene risolto senza difficoltà, nei primi anni di primaria le rappresentazioni prodotte dai bambini sono estremamente varie: alcuni disegnano dieci uova, ne cancellano tre e ridisegnano le sette rimanenti; altri usano segni schematici; altri ancora producono vere e proprie drammatizzazioni grafiche della scena, talvolta colorando di nero le uova rotte per sottolinearne la sparizione. Secondo D'Amore, l'attenzione dell'insegnante non dovrebbe concentrarsi anzitutto sulla risposta numerica, ma sul processo di traduzione del testo in rappresentazioni matematiche: la sottrazione "10 − 3" non è ancora formalizzata simbolicamente, ma è già pienamente implicata nel gesto di disegnare, barrare e contare. Questa fase è stata definita da D'Amore "anticamera logica" della soluzione: quando il bambino produce una rappresentazione adeguata e coerente col testo, ha già compiuto un passo decisivo verso la comprensione del problema.

Un secondo esempio, relativo a un problema di velocità media (il viaggio in treno da Bologna a Rimini), ha mostrato come uno studente di quinta primaria possa accompagnare una risposta corretta con un disegno che rappresenta il treno e la linea ferroviaria, senza riportare i dati numerici del problema: un disegno che, per D'Amore, non ha funzione operativa, ma costituisce una traduzione iconica che svolge un ruolo di richiamo e di ancoraggio al senso della situazione. Su questa base, D'Amore ha criticato esplicitamente i tentativi didattici di trasformare sistematicamente i testi di problema in diagrammi di flusso o schemi a blocchi standardizzati: una procedura che, lungi dal facilitare l'accesso al problema, rischia di creare un ostacolo cognitivo aggiuntivo, costringendo l'allievo a piegare la propria comprensione del testo a una forma rigida.

7. Quando il calcolo si stacca dal significato

Una parte significativa dell'intervento è stata dedicata a una serie di problemi, ben noti nella letteratura di ricerca, che mostrano come il legame tra calcolo e contesto possa risultare fragile. Il problema dell'autobus dell'esercito ("Un autobus trasporta 36 soldati. Se 1128 soldati devono essere trasportati al campo d'addestramento, quanti autobus devono essere usati?") mostra come molti allievi calcolino correttamente il quoziente 1128 : 36 ma rispondano 31, talvolta con resto 12, senza interrogarsi sul destino dei dodici soldati che non trovano posto. Secondo D'Amore, questo esempio

www.insegnareoline.com

rivela come, nella mente di molti allievi, il problema si riduca alla produzione di un risultato aritmetico, anche quando esso non ha senso rispetto alla situazione descritta.

Analoga considerazione vale per i problemi con dati contraddittori o impossibili, come quello del giardiniere che deve recintare un'aiuola triangolare con lati di 10, 12 e 24 metri – una terna che non può costituire i lati di un triangolo. D'Amore ha osservato che solo pochissimi allievi si accorgono dell'incongruenza, mentre la maggioranza procede come se nulla fosse, calcolando il perimetro o il costo della recinzione senza mettere in discussione i dati. Il celebre problema del pastore ("Un pastore ha 12 pecore e 6 capre. Quanti anni ha il pastore?"), proposto alla fine della terza primaria, genera nella stragrande maggioranza dei casi la risposta 18, ottenuta sommando meccanicamente 12 e 6: per D'Amore, ciò non segnala tanto un errore di calcolo quanto un fraintendimento profondo di che cosa sia la matematica, poiché il bambino ha appreso che di fronte a un numero di dati e a una domanda occorre sempre combinare i numeri con un'operazione, anche quando non esiste alcun legame logico tra dati e domanda.

Nello stesso filone si colloca il problema dei pasticcini ("15 amici acquistano 5 kg di pasticcini. Quanti ne toccano ciascuno?"), dove la risposta più frequente è 3, ottenuta eseguendo la divisione 15 : 5 invece della più sensata 5 : 15, per una maggiore familiarità procedurale con la prima. D'Amore ha richiamato in questo contesto anche un problema studiato da Efraim Fischbein, relativo al prezzo al litro di una bevanda (una bottiglia di aranciata da 0,75 litri che costa 2 euro): pochi allievi arrivano a impostare la divisione 2 : 0,75, mentre risulta molto più accessibile il caso analogo con numeri interi (Fischbein, 1985). Da questi esempi D'Amore ha tratto l'idea che una pratica centrata su esercizi standard generi spesso una falsa padronanza procedurale: gli studenti sanno eseguire operazioni isolate, ma faticano a riconoscere quando e come quelle operazioni siano appropriate in un contesto problematico.

8. Geometria, artefatti e strumenti di misura

Un ulteriore momento dell'intervento ha riguardato un esperimento condotto con piramidi reali, in legno pieno e in metallo vuoto, per studiare come gli studenti della classe terza della scuola secondaria di primo grado calcolano il volume. D'Amore ha mostrato come, quando il problema è presentato in forma puramente simbolica, con dati sul lato di base e lo spigolo laterale, la maggior parte degli studenti sappia applicare correttamente il teorema di Pitagora due volte per ricavare l'altezza. Tuttavia, quando viene consegnata una piramide concreta e un righello, quasi nessuno pensa di misurare direttamente l'altezza: molti misurano solo ciò che è riconoscibile come dato del problema "scolastico", riproducendo mentalmente la situazione standard anche quando l'oggetto concreto offrirebbe una via più diretta. Per D'Amore, questo risultato segnala una scarsa integrazione tra conoscenza teorica ed esperienza materiale, e mostra come la presenza di artefatti non sia di per sé garanzia di un cambiamento nelle strategie, se non accompagnata da un lavoro esplicito di problematizzazione e riflessione.

9. Oltre l'aritmetica: topologia, statistica e probabilità

Nella parte conclusiva dell'intervento, D'Amore ha allargato lo sguardo a problemi che richiedono soprattutto ragionamento topologico, come il celebre problema dei ponti di Königsberg riformulato in contesto scolastico, nei quali non si tratta di eseguire calcoli, ma di esplorare percorsi, cancellare e rifare tentativi, ragionare su vincoli e impossibilità. Tali problemi, per D'Amore, dimostrano che la matematica scolastica non dovrebbe ridursi ad aritmetica e geometria euclidea classica, ma può aprirsi a campi come la topologia in forme accessibili e ludiche. Un ultimo riferimento ha riguardato lo sviluppo recente della ricerca in didattica della statistica e della probabilità, oggi tra i settori più attivi a livello internazionale, che mettono in gioco concezioni intuitive di caso, frequenza, rischio e incertezza spesso molto diverse dalle definizioni formali.

www.insegnareonline.com

10. Conclusioni: implicazioni per la formazione degli insegnanti

L'intervento di D'Amore si chiude ribadendo che l'attività di soluzione di problemi appartiene all'intima natura della matematica e non è un corollario opzionale dopo la spiegazione teorica. Problemi si possono e si devono trovare in tutti i campi – aritmetica, geometria, logica, topologia, statistica, probabilità – senza limitarsi ai problemi "da libro" rigidamente classificati per operazione. Far vivere ai bambini e ai ragazzi una varietà di problemi, con dati talvolta ridondanti, contraddittori o mancanti, e discuterli criticamente, contribuisce a costruire una visione della matematica come attività di pensiero, di decisione e di interpretazione del mondo.

Sul piano della formazione degli insegnanti, l'intervento invita a un cambio di prospettiva: da dispensatori di esercizi a registi di situazioni problematiche, capaci di osservare, valorizzare e guidare le strategie degli allievi. D'Amore ha inoltre suggerito l'importanza di contaminare i livelli scolastici – ad esempio invitando docenti di scuola secondaria a osservare l'attività di problem solving nella primaria e nella scuola dell'infanzia – per comprendere meglio la genesi delle difficoltà successive. In questo senso, la formazione degli insegnanti dovrebbe includere una solida familiarità con i risultati della ricerca didattica, in particolare con i lavori di Duval sui registri semiotici e con gli studi di Fischbein sugli ostacoli intuitivi, ma anche una pratica sistematica di analisi di problemi concreti, delle produzioni degli studenti e delle proprie scelte di rappresentazione.

In definitiva, l'intervento di Bruno D'Amore propone una visione dinamica e culturale della matematica scolastica, intesa come linguaggio, come insieme di rappresentazioni semiotiche e come campo di problemi aperti. L'uso dei problemi non va inteso come semplice verifica di competenze tecniche, ma come motore di concettualizzazione, di presa di coscienza critica e di costruzione di significato. Per gli insegnanti, ciò implica una responsabilità nel progettare ambienti di apprendimento in cui le strategie ingenue dei bambini siano accolte, discusse e progressivamente raffinate, piuttosto che sostituite troppo presto da procedure stereotipate.

Bibliografia

Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, *5*, 37–65.

Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine: registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Peter Lang.

Fischbein, E. (1985). Ostacoli intuitivi nella risoluzione di problemi aritmetici elementari. In L. Chini Artusi (a cura di), *Numeri e operazioni nella scuola di base*. Zanichelli.

www.insegnareonline.com

4. Non è il testo a fare il problema: un laboratorio sulla distinzione fra problema ed esercizio in matematica[8*]

Carmen Bisignani[9], Grazia Mazzeo[10]

Abstract

Il contributo presenta un laboratorio di formazione rivolto a docenti di diversi ordini scolastici, dedicato alla riflessione sul rapporto tra problema ed esercizio nella didattica della matematica. Attraverso attività di esplorazione e analisi di situazioni geometriche, i partecipanti sono stati coinvolti in un percorso volto a interrogare le caratteristiche dei compiti proposti agli alunni, le strategie risolutive richieste e gli ostacoli cognitivi che possono emergere. Il laboratorio ha consentito di mettere in discussione una distinzione spesso considerata ovvia, evidenziando come la natura problematica di un'attività non dipenda esclusivamente dalla formulazione del testo, ma dall'interazione tra soggetto, contesto e conoscenze disponibili. La riflessione si è quindi spostata dalla ricerca della soluzione all'analisi dei processi di pensiero e delle implicazioni per la progettazione didattica.

1. Introduzione

La distinzione tra problema ed esercizio è un nodo classico della didattica della matematica (D'Amore, 1993, 1999; D'Amore e Fandiño Pinilla, 2006), ma la sua banalizzazione in ambito scolastico rischia di appiattirla su un criterio puramente procedurale: esercizio come applicazione di una regola nota, problema come situazione che richiede una strategia. Il laboratorio ha invece assunto come cornice teorica l'idea che un compito diventi problema non in virtù di caratteristiche testuali stabili, ma in funzione del rapporto che il soggetto instaura con esso: un allievo motivato può vivere come problema ciò che per un altro è mero esercizio, e viceversa. A incidere su questo spostamento concorrono almeno quattro fattori, emersi e discussi durante l'incontro: la dimensione emotiva e motivazionale dello studente; il modo in cui l'attività viene presentata in classe, come verifica o come esplorazione; il contratto didattico implicito tra insegnante e alunno; la vicinanza, reale o fittizia, della situazione proposta all'esperienza vissuta. In questa prospettiva, il laboratorio ha svolto una duplice funzione: offrire ai partecipanti un'esperienza matematica diretta e utilizzare tale esperienza come oggetto di analisi didattica. L'attenzione non è stata rivolta alla correttezza delle soluzioni, ma ai processi cognitivi attivati e alle decisioni che caratterizzano la progettazione di un compito.

2. L'esplorazione come esperienza problematica

L'apertura del laboratorio è avvenuta a partire da un modello geometrico concreto e manipolabile (fig. 1), introdotto senza consegne scritte. La sequenza ha preso avvio dalla domanda aperta «Per cosa mi potrebbe servire?», che sollecitava ipotesi e spostava l'attenzione dal "*cosa fare*" al "*perché*". È seguita una fase di esplorazione libera, durante la quale i partecipanti hanno potuto manipolare il modello e individuarne progressivamente possibilità e vincoli. Solo successivamente è stato proposto un compito di classificazione dei triangoli attraverso l'incrocio tra i criteri relativi ai lati – isoscele, scaleno, equilatero – e quelli relativi agli angoli – acutangolo, rettangolo, ottusangolo. Il percorso si è concluso con una domanda metacognitiva esplicita: ciò che era stato appena svolto poteva essere considerato un problema o un esercizio? La sequenza evidenzia come il carattere problematico di una situazione

8* Contributo elaborato a partire dal laboratorio di formazione svolto nell'ambito del ciclo di incontri "Matematica è(v)viva 3" (Palermo, febbraio–maggio 2026).

9 I.C. "Foscolo", Barcellona Pozzo di Gotto (ME), scuola secondaria di primo grado; C.I.D.I. Palermo. E-mail: carmen.bisignani@gmail.com

10 I.C. "Foscolo", Barcellona Pozzo di Gotto (ME), scuola secondaria di primo grado; C.I.D.I. Palermo. E-mail: graziamazzeo44@gmail.com

www.insegnareonline.com

non dipenda necessariamente dalla presenza di un testo verbale. In una prospettiva vicina a quella di Emma Castelnuovo (2005), il problema può nascere dall'incontro del soggetto con un ostacolo cognitivo, prima della sua formalizzazione linguistica. La domanda iniziale e l'esplorazione generano infatti una tensione conoscitiva: occorre formulare ipotesi, agire sul modello e verificarle. Ne consegue che la tabella di classificazione non introduce il problema, ma rende esplicita e sistematizza una conoscenza costruita attraverso l'azione. Il testo scritto assume quindi una funzione di formalizzazione a posteriori, capovolgendo la sequenza più consueta *testo* → *comprensione* → *risoluzione* e mostrando come l'attività problematica possa svilupparsi inizialmente nel registro dell'azione.



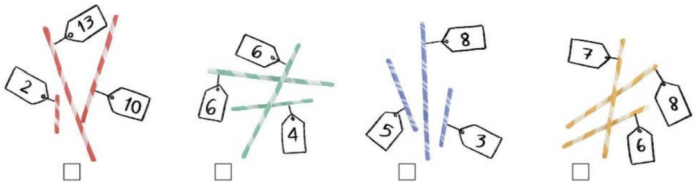
Figura 1. Il modello geometrico manipolabile proposto in apertura del laboratorio.

3. Analizzare le attività: processi, ostacoli e strategie

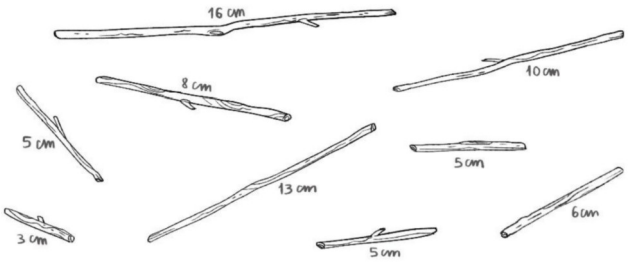
Nella fase successiva i partecipanti sono stati invitati a esaminare tre situazioni (fig. 2), individuando per ciascuna il processo cognitivo richiesto, la struttura del compito, i suoi punti di forza e le possibili criticità didattiche.

www.insegnareonline.com

Individua i gruppi di tre cannucce con cui è possibile costruire un triangolo. Le misure sono indicate in centimetri.



3. Abbina i bastoncini a 3 a 3 in modo da poterli unire a formare dei triangoli. Colora dello stesso colore i bastoncini che hai deciso di abbinare. (Suggerimento: comincia da quelli più corti e verifica gli abbinamenti utilizzando le sbarrette.)



10. WINDSURF (I) (Cat. 6, 7)

Aldo ha realizzato una nuova vela per il suo windsurf utilizzando due pezzi di stoffa, uno di colore blu e uno di colore giallo.
In ciascun pezzo di stoffa ha tagliato due triangoli non rettangoli congruenti fra loro, con due lati di 5 metri ed il terzo lato più lungo. Per formare la vela ha poi unito i due triangoli lungo uno dei lati di 5 metri.
Ora Aldo vuole mettere un nastro lungo tutto il perimetro della vela. Ha a disposizione tre nastri, uno rosso lungo 15 m, uno verde lungo 22 m e uno viola lungo 30 m, ma solo uno di questi è lungo esattamente quanto il perimetro della vela.
Quanto è lungo il terzo lato di ciascuno dei due triangoli che formano la vela che Aldo ha realizzato?

Spiegate come avete ragionato per trovare la risposta.

Figura 2. Le tre situazioni analizzate dai partecipanti (dall'alto): costruzione di triangoli con cannucce, abbinamento di bastoncini, perimetro di una vela da windsurf.

La prima attività, relativa alla costruzione di triangoli con cannucce, richiedeva di applicare la condizione di esistenza di un triangolo a casi dati. La struttura risultava chiusa, con una risposta univoca. Il contesto visivo e manipolativo offriva un riferimento concreto, mentre il caso limite, rappresentato da segmenti di lunghezza 3, 5 e 8, permetteva di mettere in evidenza la necessità di interpretare correttamente il criterio. La seconda situazione, basata sull'abbinamento di bastoncini, sollecitava invece una strategia esplorativa e combinatoria. Il processo era aperto, pur conducendo a un risultato definito. L'indicazione di iniziare dai bastoncini più corti e verificare gli abbinamenti mediante sbarrette suggeriva un possibile punto di partenza senza fornire direttamente la soluzione. La molteplicità delle combinazioni diventava così un'occasione per discutere strategie differenti. Al tempo stesso, l'ambiguità relativa all'utilizzo di tutti i bastoncini poteva generare una discussione produttiva oppure costituire un ostacolo. La terza situazione, riferita al perimetro di una vela di windsurf vincolato dalla lunghezza di un nastro, presentava una struttura a più passi: apparentemente aperta, ma in realtà a soluzione unica vincolata, richiedeva di costruire un modello geometrico mentale della figura e di utilizzare un vincolo numerico esterno per determinare l'incognita. La sua criticità più insidiosa risiedeva nel rischio di calcolare erroneamente il perimetro complessivo raddoppiando semplicisticamente il perimetro del triangolo, senza considerare che il lato condiviso tra le due metà della vela non ne costituisce il bordo: un errore di traduzione dal testo alla figura, frequente tra gli studenti. Questa gradazione, dal compito chiuso e riconoscibile fino al compito che richiede la costruzione autonoma di un modello mentale, ha permesso di mostrare come la stessa etichetta "problema" copra, nella pratica scolastica quotidiana, esperienze cognitive assai diverse tra loro, e come tale eterogeneità sia spesso invisibile a chi progetta le attività.

4. Problema o esercizio? Una distinzione situata

Le definizioni spontanee raccolte tra gli studenti (fig. 3) e l'inquadramento teorico proposto ai docenti restituiscono un'immagine coerente, seppure a due livelli diversi, della stessa difficoltà: quella di fissare un confine stabile tra problema ed esercizio. Gli studenti, interrogati senza alcuna cornice teorica, individuano il discrimine ora nello scopo, ora nella struttura formale, ora nella presenza o assenza di una risposta univoca, arrivando in un caso a negare che una differenza esista davvero.

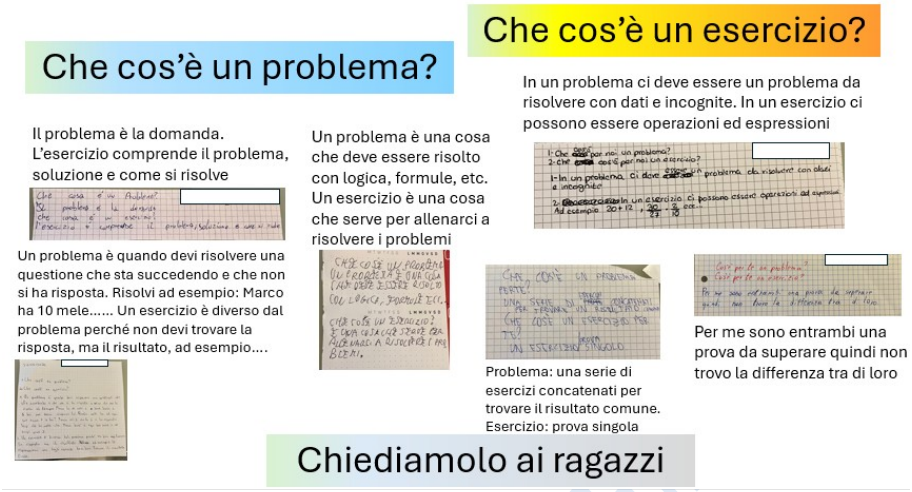


Figura 3. Alcune definizioni spontanee di "problema" ed "esercizio" raccolte tra gli studenti.

Questa dispersione non va letta come un'incertezza da correggere, ma come la prova empirica che la distinzione non risiede in una proprietà intrinseca del testo. È esattamente ciò che la riflessione teorica formalizza sul piano concettuale, quando afferma che non è il testo a fare il problema, ma il rapporto tra quel testo e chi lo affronta: l'esercizio mobilita regole già consolidate, riconducibili al rafforzamento o alla verifica, mentre il problema richiede una scelta strategica, talvolta creativa, tra più regole o nozioni, alcune delle quali ancora in via di esplicitazione. La distinzione, in altre parole, non è mai assoluta ma situata: dipende dal soggetto che affronta il compito, dal suo repertorio di conoscenze già disponibili e dal momento didattico in cui gli viene proposto. Le stesse parole imprecise degli studenti, lette alla luce di questo principio, smettono di apparire come errori di definizione e diventano testimonianze dirette di come la categoria di problema si costruisca, per ciascuno, nel rapporto vivo con la situazione, prima ancora che in qualunque tassonomia.

5. Implicazioni per la progettazione didattica

Dal laboratorio sono emerse alcune indicazioni operative, rivolte sia alla dimensione dell'insegnante sia a quella dell'allievo. Sul versante dell'insegnante, la progettazione dovrebbe partire dalla selezione consapevole dei compiti, calibrata sulle caratteristiche specifiche del gruppo classe, e dal riconoscimento dell'errore non come mancanza da correggere ma come indicatore del processo di pensiero in atto, dunque come risorsa. Sul versante dell'allievo, l'obiettivo è una pratica della matematica "autentica", intesa come attività di pensiero e non come mera applicazione procedurale: ciò implica esporre gli studenti a situazioni aperte che richiedano formulazione di ipotesi, revisione dell'errore e rielaborazione della strategia, sviluppando nel tempo un pensiero strategico non trasmissibile per via diretta.

6. Conclusioni

Il laboratorio ha mostrato come distinguere tra problema ed esercizio non significhi semplicemente classificare a posteriori le attività proposte, ma interrogarsi, già nella fase di progettazione,

sull'ostacolo cognitivo che si intende proporre e sul tipo di pensiero matematico che si vuole sollecitare. L'esperienza matematica vissuta dai docenti è diventata così occasione per analizzare le pratiche didattiche, smontando una distinzione apparentemente semplice e facendo emergere la complessità dei fattori che concorrono a determinare la natura problematica di un'attività. Il confronto tra insegnanti di diversi ordini scolastici ha favorito la condivisione di prospettive e ha permesso di rendere espliciti alcuni assunti impliciti, contribuendo alla costruzione di un linguaggio comune intorno a una nozione centrale della didattica della matematica, ma non sempre univocamente definita. L'analisi delle consegne, degli ostacoli e delle strategie ha evidenziato, inoltre, come la progettazione non possa prescindere dalle caratteristiche dei soggetti e dai contesti nei quali l'attività viene proposta. La domanda «Problema o esercizio?» non conduce dunque a una classificazione valida indipendentemente dalla situazione, ma diventa uno strumento per interrogare le scelte dell'insegnante e orientare una progettazione più consapevole. Così intesa, la matematica si configura non soltanto come applicazione di procedure, ma come attività di pensiero, esplorazione, scelta e costruzione di significati.

Bibliografia

Castelnuovo, E. (2005). *La matematica. Figure piane*, modulo A. La Nuova Italia.

D'Amore, B. (1993). *Problemi. Pedagogia e psicologia della matematica nell'attività di problem solving*. FrancoAngeli.

D'Amore, B. (1999). *Elementi di didattica della matematica*. Pitagora.

D'Amore, B., e Fandiño Pinilla, M. I. (2006). Che problema i problemi! *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, *29*(6), 645–664.

Sitografia

Banca dei problemi del Rally Matematico Transalpino (ARMT): http://www.projet-ermitage.org/ARMT/doc/bp-rmt-acces-it.html

Sito internazionale dell'ARMT: http://www.armtint.org/

www.insegnareonline.com

5. Scuola e intelligenza artificiale: quale matematica?[11*]

Cesare Rao Camemi[12]

Abstract

Il contributo riflette sul ruolo della matematica scolastica nell'era dell'intelligenza artificiale (IA). Dopo aver richiamato lo spostamento storico dell'obiettivo della matematica, prima calcolo, poi significato, si sostiene che l'IA generativa orienta la didattica verso ciò che le macchine fanno con minore abilità: porre domande, stimare, immaginare, congetturare, creare. Si propongono esempi di attività dalla scuola primaria alla secondaria, dalle stime di grandezza ai cambi di rappresentazione dei numeri, e si discute il ruolo del docente come regista della complementarità fra intelligenza umana e artificiale.

1. Introduzione

Un antico detto, di cui non è nota la fonte, recita che nell'antichità i problemi matematici erano proposti dagli dèi, nel periodo classico da semidei come Newton, Leibniz, Eulero e Lagrange, mentre oggi sono proposti dai tecnici. Resta aperta la domanda su chi li proporrà domani.

Nella nostra vita è entrato un nuovo soggetto-oggetto, l'IA. Non ci soffermiamo sulla sua utilità, già ampiamente documentata: ci interessa una questione di prospettiva. L'evoluzione in corso è molto rapida e, più che combatterla, occorre controllarla. Il rapporto OCSE (OECD, 2026) e gli studi sperimentali (Bastani et al., 2024) indicano che l'uso non guidato dell'IA può migliorare le prestazioni immediate senza consolidare l'apprendimento, con il rischio di una crescente superficialità. La scuola non può quindi limitarsi a osservare: deve interrogarsi su quale scuola, e in particolare su quale matematica, sia opportuna nell'era dell'IA.

2. Dal calcolo ai significati, e oltre

Per secoli la matematica è stata soprattutto calcolo: occorreva saper calcolare per fare l'amministratore, il commerciante, il costruttore, il navigatore. Quando le macchine hanno sostituito l'uomo nel calcolo, l'accento si è spostato sui significati, in linea con la distinzione fra comprensione strumentale e relazionale (Skemp, 1976) e con la dualità processo-oggetto dei concetti matematici (Sfard, 1991). Oggi l'IA fornisce, almeno in apparenza, anche i significati. Che cosa resta da fare alla scuola?

La tesi qui sostenuta è che si debba imparare a collaborare con la macchina, dividendo i compiti e concentrandosi dove essa è meno abile: una forma di complementarità. È coerente con le evidenze secondo cui l'integrazione di competenze docenti e strumenti di IA, con scopi pedagogici mirati, produce risultati migliori dell'uno o dell'altro separatamente (Doshi e Hauser, 2024).

3. Dai calcoli esatti alle stime

Se l'IA calcola con esattezza, la scuola può valorizzare la stima e l'ordine di grandezza (Sowder, 1992). Si può riprendere il concetto di incremento: come varia l'area di un quadrato quando il lato passa da l a l+1? Si introduce l'antico concetto di gnomone e si mostra il legame con il quadrato del binomio, $(l+1)^2 = l^2 + 2l + 1$.

Si può stimare il numero di chicchi di riso su una scacchiera, in cui i chicchi raddoppiano a ogni casella ($2^{64}-1 \approx 1{,}8\cdot10^{19}$), e quante volte occorre piegare un foglio per ottenere uno spessore di migliaia di

---

11* Contributo elaborato nell'ambito del ciclo di incontri "Matematica è(v)viva 3" (Palermo, febbraio–maggio 2026).

12 C.I.D.I. Palermo.

www.insegnareonline.com

chilometri.[13] Un terzo esempio riguarda le percentuali: che cosa accade aumentando un prezzo del 10% e poi diminuendolo del 10%? Il risultato non è il prezzo iniziale, poiché 1,1 × 0,9 = 0,99, cioè una diminuzione dell'1%.

4. Dalle risposte alle domande

L'IA è bravissima a rispondere. La scuola può allora concentrarsi sulle domande, adottando il metodo socratico e puntando sulla curiosità, alimentata da tre leve: realtà, gioco e narrazione (Bruner, 1986). Si possono proporre magie con i numeri, con le carte e con materiali costruiti appositamente; si possono leggere passi di *Alice* (Carroll, 1865), dei *Viaggi di Gulliver* (Swift, 1726) e di *Flatlandia* (Abbott, 1884) e riprendere problemi storici come quello di Delo e quello della fondazione di Cartagine. In questo modo la curiosità si trasforma in interesse, e l'interesse in ascolto.

Segue la congettura: perché? Che cosa succede se…? (Mason et al., 1982; Pólya, 1945). Un esempio è chiedersi che cosa accade se nella moltiplicazione non vale la proprietà commutativa.

L'IA sa rispondere anche a queste domande, ma solo se qualcuno le pone: non ha una visione. Spetta a docenti e alunni chiedersi perché si pone una domanda e dove si vuole arrivare. Perché, ad esempio, si chiede una scomposizione in fattori? Per definire un numero in modo diverso, per trovare mcm e MCD, per calcolare con le frazioni, per determinare le dimensioni di un rettangolo di data area.

5. Rallentare: tempo, definizioni, ripetizione

L'IA è veloce. In classe conviene rallentare, restituire spazio al calcolo mentale con attenzione ai significati e fare un elogio della lentezza, dei passaggi e della riflessione, in sintonia con l'alternanza di pensieri lenti e veloci descritta da Kahneman (2011).

Quanto alle definizioni, non si dovrebbe partire da esse, ma arrivarci quando servono, senza confonderle con le proprietà. Un caso tipico è la domanda «quando un numero si dice primo?» (Tall e Vinner, 1981).

Infine, uno stesso argomento va trattato in modi diversi, utilizzando aritmetica, algebra e geometria per lo stesso scopo (Duval, 1993). Se uno studente non ha capito, riproporgli la stessa spiegazione non servirà: ciò che non ha compreso prima continuerà a non essere compreso dopo.

6. Emozioni, bellezza, immaginazione e creatività

L'IA non trasmette entusiasmo. Si può riflettere sulle parole con cui Roberto Benigni descrive il poeta: colui che, quando gli batte il cuore, lo fa battere anche agli altri (monologo tratto dal film *La tigre e la neve*, 2005). Incoraggiare significa soffermarsi sui punti di forza e non solo sulle carenze, lavorare sull'ascolto e far emergere la bellezza. Gardner (2011) individua in verità, bontà e bellezza le tre parole che danno senso all'educazione.

Una delle qualità che sembrano aver contribuito alla supremazia di *Homo sapiens* è la capacità di immaginare ciò che non c'era. Ci si può allenare: con 27 cubetti si immagina di costruire un cubo di lato 3 e se ne colora la superficie. Quanti cubetti hanno 3, 2, 1 o nessuna faccia colorata? La risposta è 8, 12, 6 e 1 (cfr. Fischbein, 1987).

Educare alla creatività significa uscire dagli schemi, come fecero Galois e Cartesio. Spesso si ritengono bravi gli alunni che sanno imitare meglio il docente, usando le sue stesse parole e i suoi stessi metodi; vanno invece valorizzati anche quelli che cercano strade diverse, in una tensione che l'autore riconduce alla coppia Apollo e Dioniso.

13 Con un foglio dello spessore di 0,1 mm bastano circa 42 piegature per superare la distanza Terra–Luna: infatti 0,1 mm × 2^{42} ≈ 440.000 km.

www.insegnareonline.com

7. Rappresentazioni e algoritmi come strumenti

Un numero può presentarsi con vesti diverse. Il 15, ad esempio, è 1×10+5; X+5 con X=10; 3×5; 1111 in rappresentazione binaria; 211 in rappresentazione fattoriale (2·3!+1·2!+1·1!); un rettangolo di dimensioni 3 e 5. Si tratta di registri semiotici diversi dello stesso oggetto (Duval, 1993), la cui padronanza è parte del senso del numero (Dehaene, 1997).

8. Conclusioni

In una scuola che convive con l'IA la matematica non perde valore, ma cambia di baricentro: dalle risposte alle domande, dal calcolo esatto alla stima, dalla definizione imposta alla definizione necessaria, dalla ripetizione alla pluralità di rappresentazioni, dall'imitazione alla creatività. Al resto può pensare l'IA, a patto che sia l'essere umano a sapere che cosa chiederle e perché.

Bibliografia

Abbott, E. A. (1884). *Flatland: A romance of many dimensions*. Seeley & Co.

Bastani, H., Bastani, O., Sungu, A., Ge, H., Kabakcı, Ö., e Mariman, R. (2024). *Generative AI can harm learning* (The Wharton School Research Paper). SSRN. https://doi.org/10.2139/ssrn.4895486

Bruner, J. (1986). *Actual minds, possible worlds*. Harvard University Press.

Carroll, L. (1865). *Alice's adventures in Wonderland*. Macmillan.

Dehaene, S. (1997). *The number sense*. Oxford University Press.

Doshi, A. R., e Hauser, O. P. (2024). Generative AI enhances individual creativity but reduces the collective diversity of novel content. *Science Advances*, *10*(28). https://doi.org/10.1126/sciadv.adn5290

Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, *5*, 37–65.

Fischbein, E. (1987). *Intuition in science and mathematics*. Reidel.

Gardner, H. (2011). *Truth, beauty, and goodness reframed*. Basic Books.

Kahneman, D. (2011). *Thinking, fast and slow*. Farrar, Straus and Giroux (trad. it. *Pensieri lenti e veloci*, Mondadori, 2012).

Mason, J., Burton, L., e Stacey, K. (1982). *Thinking mathematically*. Addison-Wesley.

OECD (2026). *OECD Digital Education Outlook 2026: Exploring effective uses of generative AI in education*. OECD Publishing. https://doi.org/10.1787/062a7394-en

Pólya, G. (1945). *How to solve it*. Princeton University Press.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions. *Educational Studies in Mathematics*, *22*, 1–36.

Skemp, R. R. (1976). Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics Teaching*, *77*, 20–26.

Sowder, J. (1992). Estimation and number sense. In D. A. Grouws (a cura di), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 371–389). Macmillan.

Swift, J. (1726). *Travels into several remote nations of the world* [*Gulliver's travels*]. Benjamin Motte.

Tall, D., e Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, *12*, 151–169.

www.dimostrareonline.com

6. Dalle regolarità geometriche alla stima di superfici reali: un'esperienza con il "Quadrato affettato" e la piazza del Cre.Zi. Plus[14*]

Gaetana Serenella Bartolomei[15], Paola Brigaglia[16]

Abstract

Il contributo analizza il passaggio dall'aritmetica all'algebra nel primo ciclo di istruzione, proponendo un approccio laboratoriale in cui la semantica precede la sintassi, per evitare il symbol pushing. Il percorso integra due esperienze complementari: l'esplorazione figurativa del problema "Affettare il quadrato", che funge da ponte cognitivo dalla percezione visiva alla generalizzazione simbolica, e la modellizzazione di un contesto reale non strutturato, la stima della capienza utile della piazza adiacente al Cre.Zi. Plus a Palermo. Integrando metodi geometrici, probabilistici e digitali in un modello multivariabile, l'esperienza trasforma i risolutori in modellizzatori critici, promuovendo l'argomentazione e la verifica come competenze di cittadinanza.

1. Dal concreto al simbolico: il "Quadrato affettato" e il pensiero algebrico

1.1 Il quadro teorico e la *Early Algebra*

Il passaggio dall'aritmetica all'algebra, soprattutto nel primo ciclo di istruzione, rappresenta uno degli ostacoli cognitivi ed epistemologici più complessi dell'educazione matematica. La letteratura evidenzia da tempo che tale transizione non è una semplice estensione dell'aritmetica, ma richiede un vero salto concettuale: dal pensiero aritmetico, essenzialmente procedurale e orientato al calcolo numerico, al pensiero algebrico, relazionale e strutturale (Arzarello et al., 1994; Kieran, 2004).

Quando nella pratica didattica si anticipa la sintassi (il sistema di simboli, manipolazioni e regole di riscrittura, cioè il "come si scrive e si calcola") rispetto alla semantica (il significato, le relazioni e le strutture quantitative o geometriche sottostanti, cioè il "cosa significa"), l'algebra perde la sua funzione di linguaggio rappresentativo e rischia di ridursi a manipolazione cieca di simboli (*symbol pushing*). Un'introduzione formale non sostenuta da adeguate esperienze concrete impedisce la costruzione del senso matematico e genera misconcezioni destinate a consolidarsi negli anni. Nel primo ciclo ciò si manifesta, per esempio, nell'interpretazione procedurale del segno uguale, inteso come segnale "fai il conto" anziché come relazione di equivalenza tra due quantità (si pensi alla difficoltà con scritture come 5 + 3 = … + 2); nell'illusione di linearità e nella rigidità dei calcoli, che porta ad applicare schemi senza comprendere le proprietà delle operazioni (come nel classico errore $(a + b)^2 = a^2 + b^2$); e nella difficoltà di tradurre situazioni quotidiane o contesti figurativi in relazioni matematiche. L'uso di formule percepite come "vuote" può alimentare estraniamento e frustrazione, compromettendo non solo la riuscita scolastica ma anche il rapporto affettivo e motivazionale con la disciplina.

Per superare tali criticità occorre promuovere un approccio laboratoriale e d'indagine in cui l'esplorazione anticipi la formalizzazione. In questa prospettiva, richiamando i contributi di Kieran (2004) e di Radford, l'accesso al pensiero algebrico si struttura come un percorso progressivo di significazione in tre fasi.

La prima è la fase generativa/aritmetica, dedicata al riconoscimento di regolarità e *pattern*: prima di introdurre lettere o simboli astratti, studentesse e studenti esplorano regolarità numeriche e spaziali,

---

14* Contributo elaborato a partire dal laboratorio condotto dal gruppo di ricerca del C.I.D.I. Palermo nell'ambito del ciclo di incontri "Matematica è(v)viva 3" (Palermo, febbraio–maggio 2026).

15 Liceo scientifico "Benedetto Croce", Palermo; C.I.D.I. Palermo. E-mail: serenabartolomei@libero.it

16 I.C.S. "Rapisardi – Garibaldi", Palermo; C.I.D.I. Palermo. E-mail: paolabr75@gmail.com

e il calcolo diventa un terreno d'indagine in cui si impara a cogliere "ciò che cambia" e "ciò che resta costante". La seconda è la fase iconica/visuale, di ancoraggio semantico mediante modelli geometrici e manipolativi: regoli, retta dei numeri, quadretti, griglie e modelli d'area (come "affettare il quadrato") offrono un supporto percettivo alle prime intuizioni, e la figura agisce da "ancora semantica" che rende evidente la struttura della relazione prima di doverla descrivere formalmente. La terza è la fase sintattica/formale, di mediazione argomentativa e prime scritture simboliche: il passaggio alla sintassi algebrica richiede la mediazione del registro verbale, perché spiegare e argomentare a parole la regolarità individuata trasforma l'intuizione visivo-manipolativa in consapevolezza concettuale. La lingua naturale funge da ponte cognitivo: solo quando la regola è compresa e condivisa a livello verbale il gruppo classe viene guidato a sintetizzarla in forma simbolica.

L'algebra, dunque, non va insegnata come un insieme di regole per manipolare simboli, ma come strumento di sintesi per esprimere significati già compresi. Rimettere la semantica al centro significa restituirle la sua natura di linguaggio della generalizzazione, un abito mentale che insegna a guardare la matematica come un intreccio di relazioni e di significati da esplorare e raccontare.

1.2 "Affettare un quadrato": il problema

L'espressione "Affettare un quadrato" non indica un singolo problema, ma un'intera branca della geometria ricreativa e combinatoria basata sulla suddivisione di un quadrato in altre figure sotto vincoli specifici. In ambito didattico il problema è noto anche come "Quadrato dipinto", nato come semplificazione propedeutica del "Cubo dipinto"; per entrambe le versioni non esiste un autore a cui sia ufficialmente attribuita la paternità. L'attività occupa un posto di rilievo tra gli strumenti per la transizione dall'aritmetica all'algebra ed è inserita nei quadri metodologici nazionali e internazionali, come i materiali del progetto M@t.abel, curati dal Ministero dell'Istruzione e dall'Unione Matematica Italiana, e i *Principles and Standards* del NCTM (2000). Mostra inoltre che il laboratorio di matematica non richiede strumentazioni complesse. L'uso di materiali manipolativi permette anche agli alunni con DSA o con difficoltà di comprensione del testo di accedere al problema per via visuo-spaziale, riducendo il carico della memoria di lavoro sintattica: l'attività risulta così inclusiva.

L'attività parte da un contesto visivo immediato: un quadrato i cui quattro lati esterni sono colorati in rosso. Dividendo ciascun lato in tre parti uguali e tracciando le linee di taglio, il quadrato viene "affettato" in 9 quadratini uguali (figura 1). La distribuzione dei lati rossi è la seguente: 1 quadratino con nessun lato rosso (quello centrale), 4 quadratini con un lato rosso (adiacenti ai bordi, esclusi gli angoli), 4 quadratini con due lati rossi (gli angoli) e nessun quadratino con più di due lati rossi. Il conteggio si verifica subito: 1 + 4 + 4 = 9.

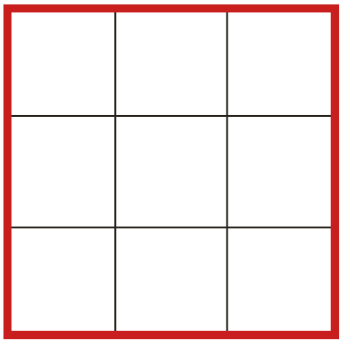


Figura 1. Il quadrato con i lati esterni colorati in rosso, diviso in 3 × 3 quadratini.

Il valore pedagogico dell'attività non risiede però nel caso 3 × 3, ma nella sequenza di generalizzazione che si orchestra. Ai partecipanti, divisi in coppie e piccoli gruppi, è stato chiesto che cosa accadrebbe dividendo ciascun lato in 4 parti uguali: quanti quadratini si ottengono, quanti senza lati rossi, quanti con uno, quanti con due, quanti con più di due. Utilizzando la tabella 1, si è poi chiesto di rispondere

www.pegroline.com

alle stesse domande per 5, 10 e 57 parti, precisando che nell'ultimo caso non interessava il numero esatto, ma le operazioni per calcolarlo. Infine si è chiesto che cosa sarebbe accaduto con una divisione del lato in *n* parti, con *n* intero positivo.

Tabella 1. Scheda di lavoro.

Numero di parti in cui è diviso ogni lato	**3**	**4**	**5**	**10**	**57**	***n***
Numero di quadratini	9					
Quadratini senza lati rossi	1					
Quadratini con un lato rosso	4					
Quadratini con due lati rossi	4					
Quadratini con più di due lati rossi	0					

1.3 Dalla visualizzazione geometrica al pensiero algebrico

Nel problema base ($n = 3$) le risposte si "leggono" osservando la figura. Nella fase empirico-manipolativa ($n = 3, 4, 5$) si privilegiano il conteggio diretto, il disegno e la colorazione. Nella fase di generalizzazione fattuale ($n = 10$) il supporto figurativo generalmente scompare e si cercano scorciatoie aritmetiche, perché il conteggio uno a uno diventa noioso e poco efficiente. La regola si intuisce già con il lato diviso in 10 parti (o anche prima): i quadratini con due lati rossi sono sempre 4, perché stanno solo ai vertici; quelli con più di due lati rossi non esistono, perché ogni quadratino del bordo condivide al massimo due lati con il perimetro; quelli con un solo lato rosso sono 8 per ciascuno dei 4 lati, cioè $8 \times 4 = 32$; quelli senza lati rossi formano un quadrato interno di lato $10 - 2 = 8$, cioè $8 \times 8 = 64$. La verifica è immediata: $4 + 32 + 64 = 100$.

Il ragionamento si estende senza difficoltà al lato diviso in 57 parti: i quadratini totali sono $57^2 = 3.249$; quelli senza lati rossi $(57 - 2)^2 = 55^2 = 3.025$; quelli con un solo lato rosso $4 \times (57 - 2) = 220$; quelli con due lati rossi sono 4. Nella fase di generalizzazione simbolica (n generico) il ragionamento spaziale si traduce nel linguaggio delle variabili: i quadratini con due lati rossi sono sempre 4, perché un quadrato ha sempre 4 angoli; quelli con un lato rosso sono $4(n - 2)$, perché su ciascun lato i quadratini agli estremi sono angoli; quelli senza lati rossi sono $(n - 2)^2$, l'area del quadrato interno ottenuto togliendo lo strato più esterno. Anche qui la somma ricompone il totale:

$$4 + 4(n - 2) + (n - 2)^2 = 4 + 4n - 8 + n^2 - 4n + 4 = n^2$$

Attraverso la scomposizione figurativa di un quadrato $n \times n$, un problema visivo e manipolativo diventa una palestra di argomentazione e formalizzazione. La manipolazione, reale o mentale, permette a tutte e a tutti, anche a chi incontra più difficoltà con il calcolo simbolico, di accedere al problema senza barriere d'ingresso, e l'errore o la conferma sono immediatamente visibili nell'immagine. Di fronte alla stessa figura si possono adottare strategie diverse: contare la cornice esterna sommando i quattro lati e sottraendo i vertici contati due volte; suddividere il quadrato in fasce orizzontali e verticali; procedere per eliminazione, togliendo il "centro" dal totale. Quando il lato cresce, il conteggio diretto diventa impossibile e il confronto tra le strategie incoraggia la verbalizzazione e la formalizzazione algebrica: è in questo spazio di discussione che nascono l'esigenza dell'argomentazione e la necessità dell'algebra. L'espressione algebrica cessa di essere una formula astratta e diventa la scrittura sintetica di una forma geometrica; le lettere diventano "etichette" che descrivono come la struttura cambia al variare delle dimensioni del quadrato.

1.4 La tabella e le regolarità aritmetiche

La generalizzazione può essere raggiunta anche per altra via, usando la tabella come strumento attivo di indagine. Compilate le colonne relative a 4, 5 e 10 parti (tabella 2), l'analisi delle righe fa emergere regolarità aritmetiche.

www.insegnareonline.com

Tabella 2. Scheda compilata per n = 3, 4, 5, 10.

Numero di parti in cui è diviso ogni lato	**3**	**4**	**5**	**10**	**57**	***n***
Numero di quadratini	9	16	25	100		
Quadratini senza lati rossi	1	4	9	64		
Quadratini con un lato rosso	4	8	12	32		
Quadratini con due lati rossi	4	4	4	4		
Quadratini con più di due lati rossi	0	0	0	0		

La sequenza 9, 16, 25, … suggerisce di proseguire con 36, 49, …, cioè con i quadrati del numero della prima riga (n^2). La sequenza 1, 4, 9, … porta ancora a numeri quadrati, ma con base diminuita di 2 rispetto alla prima riga: i quadratini senza lati rossi sono $(n - 2)^2$. La sequenza 4, 8, 12, … rimanda ai multipli di 4, con fattore pari a $n - 2$: i quadratini con un lato rosso sono $4(n - 2)$. Le sequenze 4, 4, 4, … e 0, 0, 0, … rendono immediata l'idea di costante.

L'intuizione o la regolarità percepita "a prima vista", tuttavia, non garantisce di per sé che sia l'unica soluzione corretta né che si adatti al modello geometrico: occorre verificare sistematicamente le proprie risposte. Si compie così un salto di qualità, da un apprendimento passivo a un processo di pensiero critico e metacognitivo. Il "Quadrato affettato", pur apparentemente semplice, valorizza i molteplici registri di rappresentazione (Duval, 1993) e si rivela un potente mediatore didattico, capace di innescare l'osservazione di *pattern*, stimolare l'astrazione e promuovere argomentazione e generalizzazione. La lettera *n* assume il significato di variabile di dimensione, o parametro, e la formula esprime una relazione di dipendenza funzionale tra la dimensione del quadrato originale e le sue parti.

1.5 La verifica come postura metacognitiva

Nel panorama educativo contemporaneo l'accesso a conoscenze e risposte non è più un ostacolo: motori di ricerca e modelli di intelligenza artificiale generativa mettono a disposizione contenuti di ogni tipo in una frazione di secondo. Questa facilità introduce però una nuova criticità: la proliferazione di automatismi acritici, di allucinazioni algoritmiche e di risposte accettate senza mediazione riflessiva. In questo scenario la capacità di verificare, validare e controllare le informazioni si trasforma in una competenza chiave, sia nell'istruzione superiore sia nel mondo del lavoro.

Educare al controllo dei propri elaborati significa intervenire su quattro snodi. Il primo è il passaggio dal risultato al processo, spostando il baricentro dall'ansia del completamento («ho finito il compito») alla consapevolezza della procedura («ho applicato la logica corretta?»). Il secondo è il superamento della delega tecnologica: l'interazione con gli strumenti digitali da ricezione passiva diventa dialogo critico, in cui qualsiasi output, umano o artificiale, è un'ipotesi da vagliare. Il terzo è la competenza per la complessità futura, perché, con l'esecuzione sempre più automatizzata, il valore della persona risiederà nella responsabilità intellettuale e nell'analisi delle falle logiche. Il quarto è la costruzione del pensiero critico: l'abitudine a verificare un passaggio algebrico o una fonte storiografica è la stessa struttura cognitiva che permette di decodificare le *fake news* e di orientarsi con autonomia nella sfera pubblica. Abituare alla verifica richiede tempo, pazienza e una progettazione didattica intenzionale, ma è proprio lì che la funzione docente esprime il suo valore più alto.

2. Un evento nella piazza adiacente al Cre.Zi. Plus

Considerata la sede del corso (i Cantieri Culturali alla Zisa di Palermo) e il desiderio di alimentare il confronto matematico, sono stati formati gruppi di lavoro ai quali è stata data la seguente consegna: «Si vuole realizzare un evento nella piazza adiacente al Cre.Zi. Plus. Come e cosa fare per ottenere una stima affidabile del numero di persone che effettivamente possono essere accolte nella piazza?». Ciascun gruppo doveva determinare l'area utile, distinguendo la superficie totale da quella effettivamente fruibile, esplicitare il metodo scelto per la misura e definire i parametri di densità.

www.indire.it

2.1 Il problema aperto con parametri da definire

Nel problema "tradizionale" occorre analizzare la situazione, individuare le relazioni tra le variabili, scegliere modelli e strategie e usare correttamente le tecniche risolutive, ma i dati necessari sono già presenti o implicitamente ricavabili. Il percorso non è immediato né univoco, ma il risolutore resta un pianificatore che sceglie ed esegue la strategia migliore. Il problema aperto, invece, ha natura flessibile, euristica e vicina alle situazioni reali: pone una domanda complessa senza fornire dati espliciti. Spetta al risolutore decidere quali parametri siano rilevanti, distinguendo quelli primari, che incidono fortemente sul fenomeno, da quelli secondari, che possono essere trascurati per semplificare il modello. Dopo aver ipotizzato e stimato i valori, sulla base della propria conoscenza del mondo, di dati di letteratura o di ipotesi ragionevoli, e giustificando ogni scelta, il risolutore formalizza il modello, traducendo le relazioni tra i parametri in un algoritmo o in un'equazione.

Non esiste un unico percorso, né una singola risposta corretta: risolutori che scelgono parametri diversi ma ugualmente validi giungono a modelli diversi, e la correttezza si misura sulla coerenza logica del modello, sulla ragionevolezza delle assunzioni e sulla capacità di argomentare le decisioni prese. Affrontare un quesito privo di una cornice di dati predeterminata costringe a confrontarsi con la complessità del mondo reale e con l'incertezza, e permette di passare dal ruolo di esecutore di algoritmi a quello di modellizzatore attivo, capace di interrogare il problema, isolare i fattori rilevanti e formulare ipotesi plausibili. Ne risultano affinati il rigore logico-matematico, la flessibilità e il senso pratico necessari per prendere decisioni informate in sistemi complessi.

2.2 La stima delle superfici come ponte tra realtà e pensiero matematico

La stima delle aree è uno dei nodi concettuali più critici e ricchi di potenziale della didattica della matematica: collega la geometria euclidea al calcolo integrale e sviluppa il senso della misura, la capacità di approssimazione e il pensiero critico di fronte ai modelli. Nella prassi tradizionale, tuttavia, l'area subisce spesso un riduzionismo algebrico e si appiattisce su una sequenza meccanica: applicare una formula, sostituire i numeri, calcolare e dare il risultato con l'unità di misura. La mancanza di esplorazione concettuale del piano genera criticità ben documentate (D'Amore e Fandiño Pinilla, 2007): lo scollegamento dalla natura di misura, per cui l'area diventa un'entità astratta prodotta da una moltiplicazione anziché la quantificazione di un'estensione bidimensionale mediante un'unità campione; la fragilità di fronte a figure non prototipiche o irregolari, dove l'assenza di una "formula confezionata" paralizza; e la confusione tra grandezze mono e bidimensionali, che porta a scambiare perimetro e area, a presupporre tra essi una proporzionalità diretta o a non comprendere i cambi di unità (perché 1 m^2 = 10.000 cm^2 e non 100).

Per ricostruire il significato di area si suggerisce un percorso di scoperta in tre passi. Il primo è il problema della misura e il passaggio alla stima: proporre figure non poligonali o reali (la mano, un'isola su una carta geografica) impedisce l'uso immediato di una formula e rende necessarie le approssimazioni per difetto e per eccesso. Il secondo è il valore epistemologico della tassellatura: ricoprire una superficie con quadrati, triangoli o griglie sviluppa il concetto di misura come rapporto tra l'oggetto e l'unità scelta, e anticipa intuitivamente l'integrale. Il terzo è il passaggio dal discreto al continuo: chiedersi che cosa succede riducendo la dimensione dei quadrati della griglia trasforma il calcolo dell'area da esercizio passivo a laboratorio di pensiero matematico. La stima non è dunque un ripiego rispetto alla formula esatta, ma il fondamento concettuale su cui si costruiscono la geometria sintetica e l'analisi.

2.3 Alcuni metodi per stimare superfici irregolari

La stima dell'area di una superficie irregolare connette la geometria elementare al calcolo infinitesimale (integrali di Riemann), passando per il pensiero probabilistico, il metodo scientifico e la modellizzazione digitale. I metodi più noti si possono raccogliere in geometrici tradizionali, probabilistici, analogici e digitali.

www.ingegneriedolie.com

Decomposizione. Si approssima la superficie con figure note (triangoli, rettangoli, trapezi), suddividendola in poligoni semplici di cui è facile calcolare l'area.

Tassellature e approssimazione per difetto e per eccesso. Si inquadra la figura tra due poligoni noti, uno interamente contenuto e uno che la contiene. Per la stima per difetto (A_{inf}) si contano i quadretti completamente interni alla figura; per quella per eccesso (A_{sup}) si contano tutti i quadretti che la toccano almeno in parte, così che $A_{inf} \le A \le A_{sup}$. Per ridurre l'incertezza $\Delta A = A_{sup} - A_{inf}$ si può dimezzare via via il lato del quadretto: il processo introduce il concetto di approssimazione ed è il seme intuitivo del limite e delle somme di Riemann, perché al tendere a zero della dimensione della griglia le due stime convergono all'area reale.

Simulazione Monte Carlo. È un approccio stocastico, interdisciplinare, adatto a introdurre il calcolo delle probabilità e la programmazione (per esempio con Python o Scratch). Per stimare l'area di una figura irregolare S contenuta in una regione nota di area A_R (per esempio un rettangolo, $A_R = b \times h$), si generano N punti casuali uniformemente distribuiti nella regione, con il lancio di riso o spilli su un foglio disegnato oppure con una simulazione al calcolatore (Python, GeoGebra, foglio di calcolo). Si contano i punti N_{int} che cadono in S e, per la legge dei grandi numeri, il rapporto N_{int}/N approssima il rapporto tra le aree, da cui $A_S \approx A_R \times N_{int}/N$; all'aumentare di N la stima migliora.

Metodo della pesata. Prima dei software GIS, ingegneri e cartografi stimavano le aree delle mappe con bilance di precisione, e la procedura attiva connessioni tra matematica e fisica. Si ritaglia la figura da un cartoncino omogeneo, si ritaglia dallo stesso cartoncino un quadrato di riferimento di area nota A_{rif} (per esempio 10 cm × 10 cm = 100 cm²), si pesano i due ritagli e, sfruttando la proporzionalità della densità superficiale, si ricava $A_{fig} = A_{rif} \times P_{fig} / P_{rif}$.

Teorema di Pick. Per un poligono semplice (senza lati che si incrociano e senza buchi) con vertici sui nodi di una griglia regolare, indicando con I il numero dei punti interni e con B quello dei punti sul bordo, l'area è $A = I + B/2 - 1$.

Metodi digitali. La georeferenziazione e i sistemi GIS (Google Earth, Google Maps) permettono di calcolare la superficie di laghi, isole, parchi e piazze tracciando poligoni di approssimazione su immagini satellitari. Con GeoGebra si può importare una fotografia, fissare una scala di riferimento e usare gli strumenti di selezione del bordo o di conteggio dei pixel per determinare l'area.

Dal punto di vista metodologico, prima di introdurre numeri e formule occorre lavorare sul confronto di grandezze omogenee: la sovrapposizione e l'equiestensione per scomposizione e ricomposizione mostrano che figure di forma diversa possono occupare la stessa quantità di superficie. La tassellazione con un'unità campione permette di comprendere che misurare significa contare quante volte l'unità è contenuta nella grandezza, e quindi la necessità di conservare l'unità, l'additività della misura e la ragione per cui l'unità standard delle superfici è un quadrato di lato unitario (1 cm², 1 m²). La formula non deve essere il punto di partenza, ma il punto di arrivo di una regolarità osservata: l'area del rettangolo come base × altezza nasce come scorciatoia per non contare uno per uno i quadretti di una griglia di m righe e n colonne.

2.4 Le scelte dei gruppi per la realizzazione dell'evento

Per determinare l'area della piazza adiacente al Cre.Zi. Plus, una superficie irregolare di origine industriale, i gruppi hanno adottato approcci diversi: alcuni hanno scelto un metodo analitico-geometrico, scomponendo la superficie in figure elementari e stimando l'area per difetto e per eccesso; altri hanno usato la cartografia digitale e il WebGIS su dati georeferenziati. Questi ultimi, nella vista satellitare di Google Maps, hanno definito i vertici della piazza con lo strumento di misurazione fino alla chiusura del poligono, e la piattaforma ha restituito perimetro e area complessiva.

In ogni gruppo si è discusso su come determinare la superficie netta calpestabile e realmente fruibile, e il confronto si è concentrato sui parametri necessari a una stima attendibile della capienza. Sono

www.insegnareonline.com

emersi: la conformazione della piazza, perché alberature, arredi, aiuole, ingressi ai padiglioni e dislivelli riducono la superficie lorda; l'accessibilità e le vie di afflusso e deflusso, perché conta la capacità di carico degli accessi oltre alla capienza statica; la logistica dell'allestimento, con l'ingombro di palco, regia e impianti e la necessità di vie di fuga; i servizi igienici chimici, il cui numero minimo è regolato dalla normativa sui pubblici spettacoli e il cui ingombro riduce la superficie utile; le zone di stoccaggio e il punto di soccorso; la tipologia di evento e di pubblico (posti a sedere, postazioni in piedi, flusso dinamico; scolaresche, famiglie, giovani); gli spazi riservati alla mobilità ridotta, dove un posto per persona su sedia a rotelle con spazio di manovra richiede circa 1,5–2 m² e percorsi privi di barriere; l'eliofania e l'ombreggiamento, che condizionano la fruibilità in base a orario e stagione; l'impatto acustico, che dipende dall'orientamento di palco e casse rispetto a padiglioni e aree residenziali; e il distanziamento e le norme di sicurezza, che fissano la densità (persone/m²) in relazione ai limiti per gli spettacoli all'aperto e al livello di comfort desiderato.

Dal punto di vista matematico, la capienza reale può essere rappresentata da una funzione multivariabile:

$$N = (A_{\text{lorda}} - A_{\text{ostacoli}} - A_{\text{allestimenti}} - A_{\text{sicurezza}}) \times d(t) \times \eta$$

dove A_{lorda} è la stima dell'area della piazza; A_{ostacoli} l'area di alberi, aiuole e arredi fissi; $A_{\text{allestimenti}}$ l'area di palco, regia, servizi igienici e stand; $A_{\text{sicurezza}}$ l'area dei corridoi di evacuazione e delle vie di fuga; $d(t)$ la densità target in persone/m², funzione del tipo di evento e di pubblico; η un coefficiente di riduzione ambientale o climatica, compreso tra 0 e 1.

Il dibattito durante la restituzione dei lavori è stato stimolante sul piano pedagogico e metodologico. Come previsto, i gruppi sono giunti a stime non coincidenti, e le discrepanze non sono un limite ma il valore aggiunto dell'attività, perché mostrano la matematica reale come processo di interpretazione e di scelta. La variabilità dei risultati riconduce a tre fattori. Il primo è la diversità delle ipotesi iniziali: ciascun gruppo ha assunto presupposti diversi su tipo di evento, composizione del pubblico e livello di comfort o sicurezza, adottando densità molto differenti, da stime conservative (pubblico seduto o flusso dinamico) a valori limite per eventi ad alto affollamento. Il secondo è la definizione delle condizioni di contorno e dei vincoli spaziali: alcuni gruppi hanno considerato la superficie lorda, altri hanno sottratto ostacoli fisici, strutture di allestimento e corridoi di evacuazione. Il terzo è la varietà degli strumenti: il calcolo analitico-geometrico ha prodotto intervalli di stima per difetto e per eccesso, mentre il WebGIS ha restituito misure automatizzate condizionate dalla risoluzione e dall'aggiornamento delle immagini satellitari.

In un problema di realtà, in conclusione, non esiste un'unica "risposta corretta", ma esistono modelli più o meno coerenti e raffinati nelle proprie argomentazioni.

Bibliografia

Anichini, G., e Pucci, C. (a cura di). (2006). *Laboratorio di matematica: proposte per la scuola secondaria*. ETS.

Arzarello, F., Bazzini, L., e Chiappini, G. (1994). *L'algebra come strumento di pensiero: analisi teorica e considerazioni didattiche* (Quaderno n. 6/1994). Progetto Strategico C.N.R. – Dipartimento di Matematica, Università di Pavia.

Batanero, C., e Godino, J. D. (2002). *Estocástica y su enseñanza*. Pitagora.

D'Amore, B. (2003). *Elementi di didattica della matematica*. Pitagora.

D'Amore, B., e Fandiño Pinilla, M. I. (2007). Relazioni tra area e perimetro: convinzioni di insegnanti e allievi. *La Matematica e la sua Didattica*, *21*(1), 39–68.

Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, *5*, 37–65.

Gardner, M. (1959). *The Scientific American book of mathematical puzzles and diversions*. Simon & Schuster.

Kieran, C. (2004). Algebraic thinking in the early grades: What is it? *The Mathematics Educator*, *8*(1), 139–151.

www.pitagoraonline.com

Mason, J., Burton, L., e Stacey, K. (2010). *Thinking mathematically* (2ª ed.). Pearson.

National Council of Teachers of Mathematics [NCTM]. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. NCTM.

Pólya, G. (1945). *How to solve it: A new aspect of mathematical method*. Princeton University Press.

Sitografia

INDIRE – Progetto M@t.abel: https://biblioteca.indire.it/

MED – Associazione Italiana per l'Educazione ai Media e alla Comunicazione: https://www.medmediaeducation.it/

Problemi per matematici in erba – Affettare un quadrato: https://www.problemi.xyz/affettare-un-quadrato/

Unione Matematica Italiana – Commissione Italiana per l'Insegnamento della Matematica (CIIM): https://www.umi.ciim.it/

www.insegnareonline.com

7. Insegnare geometria con le mani: un approccio operativo fra piegature, scacchiere e corde[17*]

Luigi Menna[18], Giulia Cordone[19]

Abstract

Il presente contributo raccoglie e sistematizza le attività proposte nel laboratorio di geometria operativa svolto nell'ambito del corso di formazione "Matematica è(v)viva 3", rivolto a insegnanti di scuola primaria e dei primi anni della scuola secondaria di primo grado. L'approccio adottato, che si richiama esplicitamente alla tradizione pedagogica di Emma Castelnuovo, propone di far emergere i concetti geometrici fondamentali – angolo, perpendicolarità, parallelismo, congruenza, proporzionalità – dalla manipolazione concreta di materiali semplici (fogli di carta, corde, cartoncino, il corpo stesso degli studenti), anziché da definizioni astratte presentate a priori. Nelle pagine seguenti si illustrano le principali attività del laboratorio – dalla distinzione fra verticale/orizzontale e parallelo/perpendicolare, alla costruzione di figure con la carta piegata, fino alla scacchiera di Castelnuovo, al teorema di Talete esplorato con le corde e alla costruzione di un sestante – discutendone il significato didattico e le implicazioni per la formazione degli insegnanti.

1. Introduzione: perché una geometria operativa

La geometria operativa è un approccio didattico che trasforma l'insegnamento della geometria da attività puramente teorica e astratta a pratica concreta ed esperienziale. Il principio di fondo, sviluppato e teorizzato in Italia da Emma Castelnuovo (si veda, ad esempio, Castelnuovo, 2005), è che gli studenti apprendono meglio quando apprendono facendo: manipolando oggetti concreti e scoprendo i principi matematici attraverso l'azione diretta, piuttosto che ricevendo definizioni e proprietà già confezionate.

Le attività proposte nel laboratorio, qui riorganizzate per gli atti del convegno, sono pensate per la scuola primaria e per i primi anni della scuola secondaria di primo grado. L'obiettivo non è semplicemente insegnare definizioni e proprietà, ma far emergere i concetti geometrici dall'esperienza diretta degli alunni, permettendo loro di sviluppare una comprensione profonda e duratura dei principi matematici sottostanti.

2. Parallelo e perpendicolare: superare un misconcetto diffuso

Uno degli errori più comuni nell'insegnamento della geometria è la confusione fra due coppie di concetti che agli studenti appaiono simili, ma che sono in realtà profondamente diversi: parallelo/perpendicolare da un lato, orizzontale/verticale dall'altro. Abituati a lavorare su fogli di carta con bordi netti, gli studenti associano naturalmente la perpendicolarità a ciò che è "dritto" rispetto al margine del foglio. Questo genera un errore sistematico: quando viene chiesto di disegnare l'altezza di un triangolo la cui base non è parallela ai bordi del foglio, molti studenti disegnano l'altezza verticale rispetto al foglio, e non quella effettivamente perpendicolare alla base.

La distinzione concettuale va resa esplicita: verticale e orizzontale sono concetti fisici assoluti, legati al concetto di orizzonte e a quello di gravità (rappresentato dal filo a piombo), e non dipendono dalle posizioni relative degli oggetti. Parallelo e perpendicolare sono invece concetti relazionali: esprimono

17* Contributo elaborato a partire dal laboratorio di geometria operativa svolto nell'ambito del ciclo di incontri "Matematica è(v)viva 3" (Palermo, febbraio–maggio 2026).

18 LUMSA – Libera Università Maria SS. Assunta, sede di Palermo; C.I.D.I. Palermo.

19 C.I.D.I. Palermo.

www.insegnareonline.com

sempre una relazione fra due o più rette o segmenti. Non ha senso dire “questa retta è parallela” senza specificare rispetto a cosa, così come non si può dire che una retta è perpendicolare senza indicare a quale altra retta lo è, e per quale punto passa. Per disegnare una perpendicolare servono infatti due informazioni: la retta di riferimento e il punto di passaggio – un’osservazione apparentemente complicata, ma che costituisce il cuore della comprensione geometrica di queste due relazioni strutturali.

L’attività didattica proposta nel laboratorio, che utilizza penne, matite, cordicelle, gessetti e il corpo stesso degli studenti, si sviluppa in cinque fasi progressive. Nella prima fase, di esplorazione fisica, si chiede ai ragazzi di rappresentare sul banco una retta e poi una retta perpendicolare, interrogandosi su come verificare che lo sia realmente. Nella seconda fase l’angolo emerge naturalmente dall’incontro di due rette, introducendo l’angolo retto come la configurazione in cui quattro angoli uguali si formano a croce. Nella terza fase gli studenti sono invitati a proporre in gruppo tutte le possibili definizioni di angolo – “lo spazio tra due linee”, “quanto ruoto una linea intorno a un punto”, “l’apertura tra due semirette” – confrontandole fra loro. Nella quarta fase il corpo intero entra in gioco: uno studente stende le braccia e la classe individua i quattro settori che si formano, interrogandosi su quale sia “dentro” l’angolo e quale “fuori”, una domanda che non è ovvia se non si comprende che due semirette con la stessa origine dividono il piano in due semipiani. Nella quinta fase si introducono gli angoli concavi e convessi, usando cordicelle o nastro per dividere lo spazio della stanza, evitando così il misconcetto di pensare sempre all’angolo come “la parte più piccola”.

3. Costruire la geometria con la carta: pieghe, rette e relazioni

Tra i materiali più versatili per la geometria operativa vi è il semplice foglio di carta: una piega rappresenta una retta, e le pieghe successive creano relazioni geometriche che gli studenti possono toccare, vedere e comprendere immediatamente. Per costruire una retta perpendicolare a una prima retta (ottenuta con una piega iniziale) è sufficiente piegare il foglio in modo che la piega esistente ricopra sé stessa: la nuova piega risulta perpendicolare alla prima, perché equidistante da tutti i suoi punti – una linea di simmetria che forma per costruzione angoli retti.

Particolarmente significativa, dal punto di vista didattico, è la costruzione della retta parallela come “perpendicolare della perpendicolare”: una volta ottenuta una retta e la sua perpendicolare, si costruisce la perpendicolare della perpendicolare, e la terza retta risultante è parallela alla prima. Questo procedimento permette di definire il parallelismo non con la formula astratta e di difficile verifica “due rette che non si incontrano mai”, ma operativamente: due rette sono parallele se sono entrambe perpendicolari a una stessa terza retta – un’intuizione geometrica profonda, verificabile concretamente con la carta.

Da queste due costruzioni discende naturalmente quella del rettangolo (una retta, la sua perpendicolare, e due ulteriori rette parallele alle prime due) e quella del quadrato, un rettangolo i cui quattro lati sono congruenti. Il laboratorio introduce qui una distinzione didattica importante, quella fra “uguale” e “congruente”: due segmenti non sono uguali perché potrebbero essere inclinati diversamente, ma sono congruenti se sovrapponibili tramite movimenti rigidi nello spazio. L’attività del “buchino” – un piccolo foro praticato su un lato del quadrato, riportato sull’altro lato tramite la piega perpendicolare – rende tangibile questo concetto, permettendo di misurare e verificare concretamente la congruenza dei due segmenti.

Un’ultima applicazione pratica riguarda il problema di costruire, a partire da un foglio A4 (21 × 29,7 cm), un quadrato il cui lato sia il lato più corto del foglio: piegando il foglio in modo che il lato corto combaci con il lato lungo, la parte coperta è un quadrato, e la parte in eccesso può essere ritagliata. L’esercizio mostra come il rettangolo A4 contenga al proprio interno un quadrato “nascosto”, estraibile tramite semplici operazioni di piegatura e sovrapposizione.

www.insegnareascuola.com

4. La scacchiera di Castelnuovo: moltiplicazione, potenze e frazioni

Un'attività proposta da Emma Castelnuovo, ripresa nel laboratorio, consiste nel dividere due lati adiacenti del quadrato ottenuto dal foglio A4 in otto parti uguali, creando una scacchiera di 8 × 8 = 64 quadretti. La scelta del numero otto non è casuale: piegando la carta, una piega divide il lato in due parti, due pieghe lo dividono in quattro, tre pieghe lo dividono in otto. Le potenze di due sono le più facili da ottenere piegando la carta – dividere per tre, cinque o sette è molto più difficile – e questo fatto tecnico diventa un'occasione didattica per osservare direttamente come la struttura della carta piegata conduca naturalmente alle potenze di due.

Una volta costruita la scacchiera, la moltiplicazione diventa visibile: non più una formula astratta, ma una configurazione concreta in cui il numero totale di quadretti (64) risulta dal prodotto delle divisioni sui due lati (8 × 8). Da qui l'insegnante può introdurre la leggenda della scacchiera – il sultano persiano che promette al creatore del gioco degli scacchi un chicco di grano sulla prima casella, due sulla seconda, quattro sulla terza, e così via – per illustrare concretamente il concetto di crescita esponenziale: bastano poco più di quaranta raddoppi (o pieghe) di un foglio di 0,1 mm per raggiungere una distanza paragonabile a quella fra la Terra e la Luna. La scacchiera diventa inoltre un modello concreto per le frazioni: una riga di otto quadretti rappresenta 1/8 del quadrato totale, un singolo quadretto ne rappresenta 1/64, e gli studenti vedono queste relazioni anziché limitarsi a memorizzarle.

5. Dalla scacchiera al coefficiente angolare

Sulla scacchiera è possibile porre una domanda che introduce, senza formalismi prematuri, il concetto di coefficiente angolare: dato un segmento che unisce due nodi della griglia, come si può disegnare con certezza un secondo segmento parallelo al primo? La risposta passa dal concetto di inclinazione, inteso come rapporto fra il movimento verticale e quello orizzontale lungo il segmento: se il primo segmento sale di tre quadretti mentre si sposta di quattro a destra, la sua inclinazione è 3/4, e un secondo segmento sarà parallelo al primo se mantiene lo stesso rapporto di spostamento.

Quello che gli studenti stanno calcolando, pur senza usare ancora la terminologia formale, è essenzialmente il coefficiente angolare di una retta – il rapporto fra la variazione verticale e quella orizzontale ($\Delta y/\Delta x$) – con la proprietà che due rette hanno lo stesso coefficiente angolare se e solo se sono parallele. Anche in questo caso, il laboratorio dimostra come un concetto solitamente introdotto in forma algebrica possa emergere da un'esplorazione visiva e manipolativa.

6. Il teorema di Talete: dalle corde al software OILER

Il teorema di Talete – se due rette sono tagliate da più rette parallele, i segmenti sulla prima retta sono proporzionali ai segmenti corrispondenti sulla seconda – connette la nozione di parallelismo, sviluppata nelle attività precedenti, al concetto di proporzionalità. Il laboratorio propone un'attività corporea, sviluppata dalla piattaforma OILER Education, per esplorare questo teorema con le corde: gli studenti, divisi in due squadre disposte in file parallele, si scambiano i capi di alcune corde con il compagno della squadra opposta avente lo stesso numero, ottenendo così un fascio di corde parallele fra le due file.

Una variazione dell'attività prevede che ogni studente consegni la propria corda non al compagno con lo stesso numero, ma a quello con il numero successivo: le corde risultano allora oblique rispetto alle file, ma restano parallele fra loro, poiché lo "scarto" numerico è costante. L'attività rende percepibile, con il corpo e nello spazio, come la proporzionalità non sia soltanto un concetto numerico astratto, ma una proprietà geometrica profonda, che discende automaticamente dalla presenza di rette parallele. Il materiale completo dell'attività corporea è disponibile sulla piattaforma OILER Education.

www.insegnamonline.com

7. Il sestante: misurare angoli nel mondo reale

Per collegare il concetto di angolo, sviluppato fin qui come costruzione geometrica, alla pratica di misurazione nel mondo reale, il laboratorio propone la costruzione di un sestante con materiali semplici: un settore circolare di cartoncino (idealmente di 90°), una cannuccia utilizzata come mirino, un filo a piombo attaccato al vertice del settore, e una scala goniometrica marcata lungo il bordo curvo. Per misurare l'angolo di elevazione di un oggetto – ad esempio l'altezza angolare del sole, di un edificio o di un albero – si guarda attraverso la cannuccia verso l'oggetto, lasciando che il filo a piombo penda liberamente: il punto in cui il filo interseca la scala dei gradi indica l'angolo di elevazione.

Il significato didattico di questa attività risiede nello scoprire che l'angolo non è soltanto una costruzione teorica su un foglio, ma una quantità misurabile nel mondo reale. Una volta compreso il funzionamento dello strumento, gli studenti possono estendere l'attività misurando angoli di elevazione di oggetti reali nel cortile della scuola, calcolando altezze tramite la trigonometria (nota la distanza e l'angolo), oppure indagando come i navigatori del Rinascimento utilizzassero e perfezionassero il sestante storico.

8. Emma Castelnuovo: la matrice pedagogica del laboratorio

L'intero laboratorio si richiama esplicitamente alla figura di Emma Castelnuovo (1913–2011), matematica e pedagogista italiana che ha rivoluzionato l'insegnamento della geometria sostenendo che essa non dovrebbe iniziare da definizioni astratte e assiomi, ma da esperienze concrete e manipolazione di oggetti fisici. Fra i suoi contributi più innovativi vi è l'idea delle "figure in movimento": anziché disegnare un quadrilatero fisso su carta, Castelnuovo proponeva di costruire quadrilateri articolati con asticelle di legno e cerniere, permettendo agli studenti di osservare quali proprietà rimangono invariate durante il movimento e quali cambiano – ad esempio, muovendo le asticelle un rettangolo si trasforma in un parallelogramma non rettangolare e poi in un rombo, con il perimetro che resta costante mentre l'area cambia, e la somma degli angoli interni che rimane sempre 360°.

Un dispositivo classico ripreso nel laboratorio è quello del quadrato inscritto in un quadrato: marcando un punto su ciascun lato di un quadrato e collegando i quattro punti si ottiene un secondo quadrato inscritto, la cui area varia al variare della posizione dei punti (con un minimo pari a metà dell'area del quadrato esterno quando i punti coincidono con i punti medi dei lati). Questa attività multi-annuale, proponibile dalla primaria fino alla secondaria, connette il movimento al cambiamento delle proprietà geometriche, introduce l'idea di variazione dei parametri di una figura, prepara il terreno per il concetto di funzione e dipendenza fra variabili, e consente di scoprire il teorema di Pitagora senza doverlo enunciare a priori come regola da applicare.

9. Conclusioni: dalla manipolazione alla concettualizzazione

Il filo conduttore dell'intero laboratorio è la progressione dalla manipolazione concreta di oggetti fisici alla comprensione concettuale astratta. Gli studenti che apprendono la geometria manipolando carta, costruendo figure, usando corde e osservando movimento e trasformazioni sviluppano un'intuizione geometrica duratura: quando in seguito affrontano la geometria formale, con assiomi, definizioni e dimostrazioni, non partono da zero, ma dispongono già di un'immagine mentale vivida dei concetti in gioco. La congruenza cessa di essere una parola astratta e diventa il risultato tangibile del "buchino"; il parallelismo non è più una definizione vuota, ma una relazione verificabile concretamente; la proporzionalità non è solo un rapporto numerico, ma una proprietà geometrica visibile nella configurazione di rette parallele tagliate da trasversali.

Per gli insegnanti che intendano replicare queste attività in classe, alcuni accorgimenti pratici risultano utili: preparare materiali semplici e poco costosi (fogli di carta, corde, cartoncino, pennarelli, goniometri); prevedere spazi adeguati, eventualmente il cortile o la palestra per le attività corporee come quella con le corde; resistere alla tentazione di spiegare subito il concetto, lasciando che siano

gli studenti a scoprirlo attraverso domande guida e l'esplorazione autonoma; documentare il processo con fotografie delle figure costruite, da utilizzare per la riflessione successiva; collegare sistematicamente i concetti geometrici a manifestazioni reali in architettura, design e natura.

La geometria operativa non va intesa soltanto come un metodo didattico più coinvolgente o divertente, per quanto lo sia: è un approccio pedagogicamente fondato che rispetta il modo in cui gli studenti apprendono realmente. Le figure costruite durante queste attività diventano immagini mentali persistenti, capaci di durare nel tempo ben oltre la lezione in cui sono state realizzate: quando, anni dopo, un ex studente incontrerà la parola "parallelo", potrà ancora richiamare alla mente l'immagine del foglio piegato, della perpendicolare della perpendicolare, della corda tesa sulla scacchiera. È in questo senso che la geometria operativa non si limita a insegnare fatti, ma educa lo sguardo geometrico con cui gli studenti interpreteranno il mondo.

Bibliografia

Castelnuovo, E. (2005). *La matematica. Figure piane*, modulo A. La Nuova Italia.

Sitografia

Emma Metodo. Sito dedicato alle attività e alla filosofia pedagogica di Emma Castelnuovo: https://emmametodo.com/

OILER Education. Piattaforma con materiali didattici per la scuola primaria, incluso il percorso TALES sulla geometria e il relativo software interattivo: https://it.oiler.education/

OILER Tales. Attività corporea per l'esplorazione del teorema di Talete: https://it.oiler.education/scuola/materiali/primaria/tales/82/attivita-corporea

www.insegnareonline.com